Lsz
9 000004 119716
BME-OMIKK Törökbálint
OF 2667
1982
F7414

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tomul 27 (41) Fascicola 1

IANUARIE—IUNIE
1982

Cititorii din străinătate se pot abona prin

ILEXIM,

Serv. Export-import presă - Press Department

str. 30 Decembrie nr. 3–5 - P.O.B. 136–137

Bucharest - Romania

BULETINUL ȘTIINȚIFIC ȘI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA"
TIMIȘOARA

SERIA MATEMATICĂ – FIZICĂ

Tom 27 (41) Fascicola 1

IANUARIE—IUNIE
1 9 8 2

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
7444
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. prof. dr. doc. ing. IOAN ANTON, Conf. dr. ing. GHEORGHE CREŢU, Prof. em. dr. doc. ing. GHEORGHE SILAŞ — redactor şef, Prof. em. ing. CONSTANTIN AVRAM, m.c. al Acad. R.S.R., Prof. dr. ing. DUMITRU BECHERESCU, Prof. dr. ing. VASILE COCHECI, Prof. dr. BORISLAV CRSTICI, Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA, Prof. dr. ing. TOMA DORDEA, Conf. dr. ing. TRAIAN NICOARĂ, Prof. dr. ing. FRANCISC KOVACS, Acad. prof. dr. ing. DAN MATEESCU, Prof. dr. ing. TIBERIU MUREŞAN, Conf. dr. ing. IOAN NIŢĂ, Prof. em. dr. ing. GHEORGHE SAVII, Prof. dr. doc. ing. CONSTANTIN ŞORA, Prof. dr. ing. LIVIU BRÎNDEU — secretar de colegiu

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratlelltár
P 152/1989.

COMITETUL DE REDACŢIE

I. Matematică-Fizică

— Prof. dr. BORISLAV CRISTICI — redactor responsabil
— Prof. dr. ing. COLETA DE SABATA
— Prof. dr. ing. MARIUS BORNEAS — redactor responsabil adj.
— Prof. dr. OCTAV E. GHEORGHIU
— Conf. dr. EUGEN BURLACU — secretar de redacţie
— Lect. dr. CONSTANTIN POPP.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

BULETINUL ŞTIINŢIFIC ŞI TEHNIC
AL
INSTITUTULUI POLITEHNIC „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

Tom 27 (41) Fascicola 1 ianuarie-iunie 1982

MATEMATICĂ-FIZICĂ

SUMAR

V. Popa, Multifuncţii tari continue 5

Carmencita Urosu, Congruenţe C-translatate 9

G. Babescu, Teoreme spectrale pentru funcţii cu valori operatori cosinus şi sinus 13

O. Lipovan, Asupra submăsurabilităţii aplicaţiilor multivoce 21

P. Crăciunaş, U. Dambrosio, N. Ioniţă, D. Maraval Casesnoves, Studii referitoare la sisteme cu structură complexă I. Probleme de contur pentru o clasă de sisteme nonliniare cu operatori ereditari şi polivibranţi de ordin superior 27

Şt. I. Maksay, Fenomene termice în jeturire parietale de fluid 35

E. Burlacu, P. Naslău, Asupra algebrelor Schröder-Moisil 39

N. Neamţu, N. Zopota, Generalizarea teoremei înmulţirii imaginilor şi a teoremei înmulţirii originalelor în transformarea Laplace discretă 43

A. Dragomir, V. Laziun, Combinări generalizate 47

P. Naslău, Aproximarea soluţiei unor ecuaţii integrale neliniare 55

T. Bânzaru, N. Crivăţ, Caracterizarea aproape-periodicităţii unei aplicaţii multivoce cu ajutorul şirurilor generalizate 59

Coleta de Sabata, P. Crăciun, Rada Baea, Un procedeu de îmbunătăţire a transmiterii căldurii în Helio-convertoarele plane industriale .. 63

Coleta de Sabata, Maria Boldan, Maria Gangal, Asupra structurilor la magneţii permanenţi de tip Alnico 1500 obţinute prin tehnica Bitter 69

M. Borneas, Teorie a Spaţiu-Cîmpului 75

BULETIN SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE „TRAIAN VUIA" TIMIŞOARA

Tom 27 (41) Fascicule 1 Janvier-Juin 1982

MATHEMATIQUE-PHYSIQUE

SOMMAIRE :

V. Popa, Strongly continuous multifunctions 5

Carmencita Urosu, Congruences C-translates 9

G. Babescu, Spectralnîe teoremî dlea funcţii soznaceniami operatorov cosinus i sinus 13

O. Lipovan, Sur la sous-mesurabilité des functions multivoques 21

P. Crăciunaş, U. Dambrosio, M. Ioniţă, D. Maravall Casesmoves, Contributions a l'étude des systèmes aux structures complexes. I. Problèmes à la frantière pour certains systèmes non linéaires aux opérateurs héréditaires et polyvibrants, ou bien aux dérivées totales au sens de Mauro Picome, dórdre supérieur 27

Şt. I. Maksay, Thermic phenomena in thermally isolated parietal jets .. 35

E. Burlacu, P. Naslău, Sur les algebres Schröder-Moisil 39

N. Neamţu, N. Zopota, La généralisation du théorème de multiplication d'images et du théorème de multiplication d'originales dans la transformation Laplace discrete 43

A. Dragomir, V. Laziun, Generalized combination 47

P. Naslău, Aproximation of solution of some nonlinear integral equation 55

T. Binzaru, N. Crivăţ, Nets and almost-periodicity for multifunctions .. 59

Coleta des Sabata, P. Crăciun, Rada Baea, Un procédé pourl'amélioration du transfer de chaleur dans les hélioconverteurs plans industriels 63

Coleta de Sabata, Sur la Structure magnétique des aimants permanents de type ALNICO 1500 obtenue par la technique de Bitter 69

M. Borneas, Space-Field Theory 75

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom. 27 (41) **Fascicola 1**
MATEMATICĂ—FIZICĂ

MULTIFUNCŢII TARI CONTINUE

DE

VALERIU POPA

Primită la redacţie la 7.VII. 1980.

1. Definiţii. Caracterizări.

Conceptul de aplicaţie univocă tare continuă a fost introdus de N. Levine în [1] astfel:

Definiţia 1. O aplicaţie univocă $f: X \to Y$ (X şi Y fiind spaţii topologice) este tare continuă dacă pentru fiecare submulţime A a lui X, $f(\bar{A}) \subset f(A)$. (Prin $\bar{A}$ am notat închiderea lui A).

Proprietăţile funcţiilor tari continue şi legăturile dintre funcţiile tari continue şi alte tipuri de funcţii sînt studiate de S. A. Naimpally în [3], H. F. Cullen în [4] şi S. P. Arya şi R. Gupta în [5].

Bânzaru demonstrează în [6] că o multifuncţie $F: X \to Y$ este inferior semicontinuă (s.c.i.) dacă şi numai dacă pentru orice submulţime $A \subset X$, $F(\bar{A}) \subset \overline{F(A)}$.

Prin analogie cu definiţia 1 vom defini multifuncţiile tari s.c.i. astfel:

Definiţia 2. O multifuncţie $F: X \to Y$ este tare s.c.i. dacă pentru orice submulţime A a lui X, $F(\bar{A}) \subset F(A)$.

Evident, orice multifuncţie tare s.c.i. este s.c.i. [6].

Teorema 1 Multifuncţia $F: X \to Y$ este tare s.c.i. dacă şi numai dacă $F(A') \subset F(A)$ (A' fiind mulţimea derivată a mulţimii A).

Demonstraţia este evidentă.

Pentru o multifuncţie $F: X \to Y$ vom nota cu $F^+(G)$ şi $F^-(G)$ inversă superioară, respectiv, inferioară a mulţimii G ca în [7] şi atunci:

$$F^+(G) = \{x \in X : F(x) \subset G\}; \quad F^-(G) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \varnothing\}.$$

Teorema 2. Pentru multifuncţia $F: X \to Y$ următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1. F este tare s.c.i.
2. $F^+(B)$ este închisă în X oricare ar fi $B \subset Y$.
3. $F^-(B)$ este deschisă în X oricare ar fi $B \subset Y$.

Demonstraţie.

1. $\Rightarrow$ 2. Fie $x \in [F^+(B)]'$.

Atunci

$$F(x) \subset F[(F^+(B))'] \subset F[F^+(B)] \subset B.$$

Conform teoremei 1, deci $x \in F^+(B)$, ceea ce arată că $F^+(B)$ este închisă.

(2) $\Rightarrow$ (1). Fie $A \subset X$. Avem $A \subset F^+(F(A))$, deci $A' \subset [F^+(A))]' \subset F^+(F(A))$ deoarece $F^+(F(A))$ este închisă din ipoteză. Deci $F(A)') \subset F(F^+(F(A))) \subset F(A)$ ceea ce arată că F este tare s.c.i. conform teoremei 1.

(2) $\Rightarrow$ (3). Fie $A \subset Y$ și să considerăm mulțimea $Y-A$. Atunci $F^+(Y-A)$ este închisă în X din ipoteză, dar $F^+(Y-A)=X-F^-(A)$, ceea ce arată că $F^-(A)$ este deschisă.

(3) $\Rightarrow$ (2). Fie $A \subset Y$ și să considerăm mulțimea $Y-A$. Atunci $F^-(Y-A)$ este deschisă din ipoteză, dar $F^-(Y-A)=X-F^+(A)$ ceea ce arată că $F^+(A)$ este închisă în X.

Corolarul 1. Multifuncția $F: X \to Y$ este tare s.c.i. dacă și numai dacă $F^-(y)$ este deschisă pentru orice $y \in Y$.

Corolarul 2. Aplicația univocă $f: X \to Y$ este tare continuă dacă și numai dacă $f^{-1}(A)$ este închis-deschisă pentru orice submulțime A a lui Y. [1].

2. Proprietăți ale multifuncțiilor tari s.c.i.

Teorema 3. Dacă $F_1: X \to Y$ este tare s.c.i. și $F_2: Y \to Z$ este o multifuncție oarecare, atunci $F=F_2 \circ F_1$ este tare s.c.i.

Demonstrație. Fie A o mulțime oarecare din Z. Cum $F^+(A)=F_1^+(F_2^+(A))$ și cum F_1 este tare s.c.i. rezultă că $F_1^+(F_2^+(A))$ este închisă în X și deci F este tare s.c.i.

Teorema 4. Fie $F_i: X \to Y$, $i \in I$ o familie de multifuncții tari s.c.i., atunci multifuncția $F=\bigcup_{i \in I} F_i(x)$, definită prin corespondența $x \to \bigcup_{i \in I} F_i(x)$ este tare s.c.i.

Demonstrație. Dacă G este o mulțime oarecare din Y, vom avea

$$F^-(G)=\{x \in X : \bigcup_{i \in I} F_i(x) \cap G \neq \varnothing\}=\bigcup_{i \in I} F_i^-(G).$$

Multifuncțiile F_i, $i \in I$ fiind tari s.c.i., $F_i^-(G)$ sînt deschise în X pentru orice $i \in I$ și deci $F^-(G)$ este o mulțime deschisă în X și prin urmare F este tare s.c.i. conform teoremei 2.

Teorema 5. Fie $F_i: X \to Y$, $i=1, \ldots, n$ o familie finită de multifuncții tari s.c.i., atunci multifuncția $F=\bigcap_{i=1}^{n} F_i: X \to Y$, definită prin corespondența $x \to \bigcap_{i=1}^{n} F_i(x)$, este tare s.c.i.

Demonstrație. Dacă G este o mulțime oarecare din Y, vom avea

$$F^-(G)=\{x \in X : \bigcap_{i=1}^{n} F_i(x) \cap G \neq \varnothing\{=\bigcap_{i=1}^{n} F_i^-(G).$$

Multifuncțiile F_i, $i \in I$ fiind tari s.c.i., mulțimile $F_i(G)$ sînt deschise conform teoremei 2 și deci $F^-(G)$ este deschisă în X și prin urmare G este tare s.c.i. conform teoremei 2, implicația (3) $\Rightarrow$ (1).

Teorema 6. Dacă $F: (X, T) \to (Y, Q)$ este o multifuncție iar T este topologia discretă pe X, atunci F este tare s.c.i.

Demonstrație. Cum fiecare mulțime a lui X este deschisă în (X, T), rezultă că $F^-(G)$ este deschisă în X oricare ar fi mulțimea $G \subset Y$, deci F este tare s.c.i. conform teoremei 2, implicația (3) $\Rightarrow$ (1).

Corolarul 3. Dacă f este o aplicaţie univocă a spaţiului topologic (X, S) în spaţiul (Y, T), unde S este topologia discretă pe X, atunci f este tare continuă. (Th. 2 ; [4]).

Definiţia 3. O multifuncţie $F: X \to Y$ se numeşte superior compactă dacă $F^+(G)$ este o submulţime compactă a lui X oricare ar fi mulţimea compactă $G \subset Y$.

Teorema 7. Orice multifuncţie tare s.c.i. definită pe un spaţiu compact este superior compactă.

Demonstraţie. Fie $F: X \to Y$ o multifuncţie tare s.c.i. cu X spaţiu compact. Fie A o submulţime compactă a lui Y. Cum F este tare s.c.i. atunci din teorema 2, implicaţia (1) $\Rightarrow$ (2), $F^+(A)$ este închisă în X. Cum X este compact, $F^+(A)$ este compactă şi deci F este superior compactă.

Corolarul 4. Orice aplicaţie univocă tare continuă $f: X \to Y$, cu X spaţiu compact este compactă. (Th. 4.1 ; [5]).

Definiţia 4. Un spaţiu topologic X este $C-c$ spaţiu dacă o mulţime este compactă dacă şi numai dacă este închisă. [2].

Teorema 8. Fie $F: X \to Y$ o multifuncţie a $C-c$ spaţiului X cu valori în spaţiu Y ereditar compact (adică fiecare submulţime a lui Y este compactă), atunci F este tare s.c.i. dacă şi numai dacă F este superior compactă.

Demonstraţie. Dacă F este tare s.c.i. şi A o submulţime compactă a lui Y, atunci $F^+(A)$ este o submulţime închisă a lui X conform teoremei 2, implicaţia (1) $\Rightarrow$ (2). Cum X este $C-c$ spaţiu atunci $F^+(A)$ este compactă şi deci F este superior compactă.

Reciproc, dacă F este superior compactă şi B o submulţime a lui Y, cum Y este ereditar compact, B este compactă. Cum X este un $C-c$ spaţiu, atunci $F^+(B)$ este închisă şi conform teoremei 2, implicaţia (2) $\Rightarrow$ (1), F este tare s.c.i.

Corolarul 5. Fie $f: X \to Y$ o aplicaţie univocă a $C-c$ spaţiului X cu valori în spaţiu Y ereditar compact, atunci f este tare continuă dacă şi numai dacă este compactă. (Th. 4.2 ; [5]).

BIBLIOGRAFIE

1. N. Levine, Strong continuity in topological space, Amer. Math. Monthly, 67 (1960), 269
2. N. Levine, When are compact and closed equivalent, Amer. Math. Monthly, 72 (1965) 41–44.
3. S.A. Naimpally, On stronlyg continuous functions. Amer. Math. Monthly, 74 (1967), 166–168.
4. H.F. Cullen, Complete continuity for functions, Amer. Math. Monthly, 68 (1961), 165–168.
5. S.P. Arya, R. Gupta, On strongly continuous mappings, Kyungpook Math, J., 14, 2, December, (1974), 131–143.
6. T. Bânzaru, Asupra continuităţii aplicaţiilor multivoce, Bul. Şt. tehn. Instit. Politehnic „T. Vuia", Timişoara, 712 (1971).
7. C. Berge, Espace topologique. Fonctions multivoques. Dunod, Paris (1959).

STRONGLY CONTINUOUS MULTIFUNCTIONS

In this work, by analogy with the notion of strongly continuous functions [1] we define the notion of strongly lower semicontinuous multifunctions, give characteristics of these multifunctions and we study some their properties and obtaining results that generalize the results from [1]–[5].

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

Tom. 27 (41) **Fascicola 1**

MATEMATICĂ—FIZICĂ

CONGRUENTE C- TRANSLATATE

DE

CARMENCITA UROŞU

Primită la redacţie la 7 VII 1980.

Fie $U=<A,\ F>$ o algebră universală şi $\mathcal{C}(U)$ laticea congruenţelor pe această algebră.

Prin fixarea unei congruenţe $\theta \in \mathcal{C}(U)$, definim V — translaţia ψ_θ ca o aplicaţie de la $\mathcal{C}(U)$ în $\mathcal{C}(U)$, astfel că pentru orice $\rho \in \mathcal{C}(U)$:

$$\psi_\theta(\rho)=\rho \vee \theta.$$

Definiţia I. Congruenţa $\theta \in \mathcal{C}(U)$ se numeşte C-translatată dacă este satisfăcută condiţia:

$$\theta=\bigwedge \psi_\theta(C),\ C \subseteq \mathcal{C}(U) \qquad (I)$$

Dacă fiecare $\theta \in \mathcal{C}(U)$ este C-translatată, spunem că $\mathcal{C}(U)$ este C-translatată. În particular putem vorbi despre o submulţime de congruenţe (sublatice, ideal, interval) C-translatată.

Propoziţia I. Dacă congruenţa $\theta \in [\theta_1, \bigwedge\theta_2)$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{C}(U)$, este un element distributiv în filtrul principal $[\theta_1 \wedge \theta_2)$ atunci θ este $\{\theta_1, \theta_2\}$-translatată.

Demonstraţie. Deoarece $\theta \geqslant \theta_1 \wedge \theta_2$, are loc relaţia: $\theta=\theta \vee (\theta_1 \wedge \theta_2)$. Congruenţa θ fiind distributivă în intervalul $[\theta_1 \wedge \theta_2)$, rezultă:

$$\theta=(\theta \vee \theta_1) \wedge (\theta \vee \theta_2)=\bigwedge \psi_\theta(c)$$

unde $C=\{\theta_1, \theta_2\}$. Deci θ este $\{\theta_1, \theta_2\}$-translatată.

Consecinţă. Dacă algebra factor $U/\theta_1 \wedge \theta_2$ are laticea congruenţelor distributivă, rezultă că în $\mathcal{C}(U)$ filtrul principal $[\theta_1 \wedge \theta_2)$ este $\{\theta_1, \theta_2\}$-translatat.

Propoziţia 2. Dacă laticea $\mathcal{C}(U)$ este modulară şi filtrul principal $[\theta_1 \wedge \theta_2)$ este $\{\theta_1, \theta_2\}$-translatat, atunci oricei nterval de forma $[\varphi_\rho[\theta_1 \wedge \theta_2), \rho]$, $\rho \in \mathcal{C}(U)$ este $\{\varphi_\rho(\theta_1), \varphi_\rho(\theta_2)\}$-translatat.

Demonstraţie. Filtrul $[\theta_1 \wedge \theta_2)$ este $C=\{\theta_1, \theta_2\}$-translatat d. şi n.d. $\forall \theta \in \in [\theta_1 \wedge \theta_2)$ are loc relaţia:

$$\theta=(\theta \vee \theta_1) \wedge (\theta \vee \theta_2)$$

Fie $\theta \in [\varphi_\rho(\theta_1 \wedge \theta_2), \rho]=[\rho \wedge \theta_1 \wedge \theta_2, \rho]$. Congruenţa $\theta \vee (\theta_1 \wedge \theta_2)$ aparţine intervalului $[\theta_1 \wedge \theta_2)$ şi conform ipotezei avem:

$$\theta \vee (\theta_1 \wedge \theta_2)=\psi_{\theta \vee (\theta_1 \wedge \theta_2)}(\theta_1) \wedge \psi_{\theta \vee (\theta_1 \wedge \theta_2)}(\theta_2)=$$

$$=[\theta \vee (\theta_1 \wedge \theta_2) \vee \theta_1] \wedge [\theta \vee (\theta_1 \wedge \theta_2) \vee \theta_2]=\psi_\theta(\theta_1) \wedge \psi_\theta(\theta_2)$$

Deci are loc relaţia:

$$\psi_\theta(\theta_1 \wedge \theta_2)=\psi_\theta(\theta_1) \wedge \psi_\theta(\theta_2) \qquad (2)$$

Laticea $\mathcal{C}(U)$ fiind modulară, $\forall\, \theta,\ \rho,\ \lambda \in \mathcal{C}(U)$ şi $\theta \leqslant \rho$ are loc relaţia :

$$\rho \wedge (\lambda \vee \theta) = (\rho \wedge \lambda) \vee \theta$$

Deci :

$$\rho \wedge [(\theta_1 \wedge \theta_2) \vee \theta] = (\rho \wedge \theta_1 \wedge \theta_2) \vee \theta = \theta$$

Conform relaţiei (2) rezultă :

$$\theta = \rho \wedge [\theta \vee (\theta_1 \wedge \theta_2)] = \rho \wedge [(\theta \vee \theta_1) \wedge (\theta \vee \theta_2)] =$$

$$= [\rho \wedge (\theta \vee \theta_1)] = [\rho \wedge (\theta \vee \theta_2)]$$

Aplicînd din nou proprietatea de modularitate pentru $\theta \leqslant \rho$, obţinem :

$$\theta = [\theta \vee (\rho \wedge \theta_1)] \wedge [\theta \vee (\rho \wedge \theta_2)] = \psi_\theta (\rho \wedge \theta_1) \wedge \psi_\theta (\rho \wedge \theta_2)$$

Deci congruenţa θ este $\{\rho \wedge \theta_1,\ \rho \wedge \theta_2\}$-translatată.

Prin inducţie simplă, se obţine următoarea consecinţă a Prop. 2 :

Consecinţă. Pentru o familie finită de congruenţa $\{\theta_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{C}(U)$, avînd proprietatea că intervalul $[\theta_i \wedge \theta_j)$ este $\{\theta_i,\ \theta_j\}$-translatat, $\forall i, j = \overline{1, n}$, rezultă că intervalul $[\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \ldots \wedge \theta_n,\ \theta_i]$ este $\{\theta_i \wedge \theta_j\}_{j \neq i}$-translatat.

În continuare vom presupune că $\mathcal{C}(U)$ este modulară sau este satisfăcută condiţia mai tare, de permutabilitate a congruenţelor algebrei U.

Propoziţia 3. Dacă mulţimea finită de congruenţe $C \subseteq \mathcal{C}(U)$ satisface condiţiile :

a) $\bigwedge C = \omega$

b) $\forall \theta_1,\ \theta_2 \in C$ filtrul principal $[\theta, \bigwedge \theta_2)$ este $\{\theta_1,\ \theta_2\}$-translatat, atunci $\mathcal{C}(U)$ are congruenţele C-translatate.

Demonstraţie. Fie $C = \{\theta_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{C}(U)$ astfel încît are loc condiţia $\bigwedge_{i=1}^{n} \theta_i = \omega$. Conform condiţiei *b*) din ipoteză, pentru $\forall \theta_1,\ \theta_2 \in C$ şi $\theta \geqslant \theta_1 \wedge \theta_2$ are loc relaţia : $\theta = \bigwedge_{i=\overline{1,2}} \psi_\theta (\theta_i)$. Considerăm idealul principal $[\theta_i]$. Conform consecinţei Prop. 2, rezultă că intervalul : $(\theta_i] = \left[\bigwedge_{i=1}^{n} \theta_i,\ \theta_i\right]$ este $C' = \{\theta_i \wedge \theta_j\}$-translatat. Deci pentru $\forall \theta \in \mathcal{C}(U)$ şi $\theta \leqslant \theta_i$ are loc relaţia :

$$\theta = \bigwedge_{j=\overline{1,n};\ j \neq i} [\theta \vee (\theta_i \wedge \theta_j)] = \psi_\theta (C')$$

Dar $\theta_i \wedge \theta \in (\theta_i]$ pentru $\forall \theta \in \mathcal{C}(U)$ şi deci are loc relaţia :

$$\theta_i \wedge \theta = \bigwedge_{j \neq i\ ;\ j=\overline{1,n}} [(\theta_i \wedge \theta) \vee (\theta_i \wedge \theta_j)]$$

Deoarece $\theta_i \wedge \theta_j \subseteq \theta_i$ se aplică modularitatea laticei $\mathcal{C}(U)$ şi rezultă :

$$\theta_i \wedge \theta = \bigwedge_{j=\overline{1.n};\ j \neq i} \{\theta_i \wedge [\theta \vee (\theta_i \wedge \theta_j)]\} = \theta_i \bigwedge_{j \neq i} \} \wedge [\theta \vee (\theta_i \wedge \theta_j)\}$$

Avem : $\theta \vee (\theta_i \wedge \theta_y) \geqslant \theta_i \wedge \theta_y$ şi conform Prop. 2 rezultă :

$$\theta_i \wedge \theta = \theta_i \wedge [\bigwedge_{i=\overline{1,n}} (\theta \vee \theta_i)]$$

şi deci are loc relaţia :

$$\theta = \theta \vee (\theta_i \wedge \theta) = \theta \vee \{\theta_i \wedge [\bigwedge_{i=\overline{1,n}} (\theta \vee \theta_i)]\} = \bigwedge_{i=\overline{1,n}} (\theta \vee \theta_i)$$

Rezultă că θ este C-translatată și deci $\mathcal{C}(U)$ este C-translatată.

Fie algebra U reprezentată ca produs direct finit al algebrelor $\{U_i\}_{i=\overline{1,n}}$: $U \cong \prod_{i=1}^{n} U_i$. Dacă π_i, $i=\overline{1,n}$, sînt congruențele induse de omomorfismele de proiecție, are loc condiția $\bigwedge_{i=1}^{n} \pi_i = \omega$. Distributivitatea laticei $\mathcal{C}(U/\pi_i \wedge \pi_j)$ implică proprietatea că $[\pi_i \wedge \pi_j)$ este $\{\pi_i, \pi_j\}$-translatat. Rezultă următoarele consecință a Prop. 3:

Consecință. Dacă în reprezentarea algebrei U ca produs direct finit algebrele factor $U/\pi_i \wedge \pi_j$ au laticea congruențelor distributivă, rezultă că $\mathcal{C}(U)$ are congruențe $\{\pi_i\}_{i=\overline{1,n}}$-translatate.

Propoziția 4. Pentru o familie de congruențe $C=\{\theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, $C \subseteq \mathcal{C}(U)$, astfel încît C este $\wedge$-independentă și $\mathcal{C}(U)$ este C-translatată, are loc următoarea proprietate:

$$\forall \theta \in C, \quad \psi_\theta : \mathcal{C}(U) \to [\theta_\gamma)$$

este un omomorfism laticeal.

Demonstrație. Notăm $\bigwedge \{\theta_\lambda \mid \lambda \neq \gamma, \lambda \in \Gamma\} = \overline{\theta_\gamma}$. Prin ipoteză mulțimea C este independentă, adică are loc relația: $\theta_\gamma \vee \overline{\theta_\gamma} = \tau_u$.

$\mathcal{C}(U)$ fiind C-translatată, pentru orice $\theta \in \mathcal{C}(U)$ are loc relația:

$$\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\theta \vee \theta_\gamma) = \theta$$

Legea de subdistributivitate este satisfăcută în orice latice completă:

$$\theta \vee (\bigwedge \{\theta_\gamma) \gamma \neq \lambda, \lambda \in \Gamma\} \leqslant \bigwedge_{\lambda \neq \gamma} (\theta \vee \theta_\lambda).$$

Are loc relația:

$$\theta \leqslant (\theta \vee \theta_\gamma) \wedge (\theta \vee \overline{\theta_\gamma}) \leqslant \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\theta \vee \theta) = \theta$$

și deci:

$$\theta = (\theta \vee \theta_\gamma) \wedge (\theta \vee \overline{\theta_\gamma}) \qquad (\alpha)$$

Considerăm translația: $\psi_{\theta\gamma} : \mathcal{C}(U) \to [\theta_\gamma)$, $\theta_\gamma \in C$. Dacă $\theta, \rho \in \mathcal{C}(U)$ aplicînd legea de modularitate pentru $(\theta \vee \theta_\gamma) \wedge (\rho \vee \theta_\gamma) \supseteq \theta_\gamma$, obținem:

$$\psi_{\theta\gamma}(\theta \wedge \rho) = (\theta \wedge \rho) \vee \theta_\gamma \overset{(\alpha)}{=} [(\theta \vee \theta_\gamma) \wedge (\theta \vee \overline{\theta_\gamma}) \wedge (\rho \vee \theta_\gamma) \wedge$$

$$\wedge (\rho \vee \overline{\theta_\gamma})] \vee \theta_\gamma = (\theta \vee \theta_\gamma) \wedge (\rho \vee \theta_\gamma) \wedge [(\theta \vee \overline{\theta_\gamma}) \wedge (\rho \vee \overline{\theta_\gamma})) \vee \theta_\gamma] =$$

$$= (\theta \vee \theta_\gamma) \wedge (\rho \vee \theta_\gamma)$$

Deci are loc proprietatea:

$$\psi_{\theta\gamma}(\theta \wedge \rho) = \psi_{\theta\gamma}(\theta) \wedge \psi_{\theta\gamma}(\rho).$$

Evident are loc și relația:

$$\psi_{\theta\gamma} \mid \theta \vee \rho) = \psi_{\theta\gamma}(\theta) \vee \psi_{\theta\gamma}(\rho).$$

Deci $\psi_{\theta\gamma}$ este un omomorfism de latici.

Consecință. În condițiile Propoziției 4, rezultă că fiecare $\theta_\gamma \in C$ este un element distributiv în $\mathcal{C}(U)$:

$$\theta_\gamma \vee (\theta \wedge \rho) = (\theta_\gamma \vee \theta) \wedge (\theta_\gamma \vee \rho), \quad \forall \theta, \rho \in \mathcal{C}(U).$$

Propoziția 5. Pentru orice familie de congruențe $C=\{\theta_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathcal{C}(U)$ astfel încît C este $\bigwedge$-independentă și $\mathcal{C}(U)$ este C-translatată, există un izomorfism laticeal între $\mathcal{C}(U)$ și $\prod_{\gamma\in\Gamma}[\theta_\gamma)$.

Demonstrație. Conform Prop. 4, pentru orice $\theta_\gamma \in C$, translația :

$$\psi_{\theta\gamma} : \mathcal{C}(U) \to [\theta_\gamma)$$

este un omomorfism laticeal. Considerăm aplicația $f: \mathcal{C}(U) \to \prod_{\gamma\in\Gamma}[\theta_\gamma)$ definită prin : $[f(\theta)]_\gamma = \psi_{\theta\gamma}(\theta)$. Evident, f este un omomorfism de latici. Vom arăta că f este un izomorfism. Fie $\rho, \theta \in \mathcal{C}(U)$ și $\rho \neq \theta$. Deoarece $\mathcal{C}(U)$ este C-translatată, rezultă : $\rho = \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \psi_\rho(\theta_\gamma)$ și $\theta = \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \psi_\theta(\theta_\gamma)$. Deci $\bigwedge_{\gamma\in\Gamma}(\theta_\gamma \vee \rho) \neq \bigwedge_{\gamma\in\Gamma}(\theta_\gamma \vee \theta)$ ceea ce implică $\theta_\gamma \vee \rho \neq \theta_\gamma \vee \theta$ pentru cel puțin un $\gamma \in \Gamma$. Rezultă că f este un monomorfism. Pentru a arăta că f este un epimorfism, fie un element $\mu \in \prod_{\gamma\in\Gamma}[\theta_\gamma)$. Evident $\mu = (\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ unde $\mu_\gamma \geqslant \theta_\gamma$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$. Vom arăta că există o congruență în $\mathcal{C}(U)$ care prin $\psi_{\theta\gamma}$ este translatată în μ_γ. Considerăm congruența $\rho = \bigwedge_{\gamma\in\Gamma}\mu_\gamma$ și avem :

$$\psi_{\theta\gamma}\left(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma}\mu_\gamma\right) = \left(\bigwedge_{\gamma\in\Gamma}\mu_\gamma\right) \vee \theta_\gamma = \left[\mu_\gamma \wedge \left(\bigwedge_{\alpha\neq\gamma}\mu\alpha\right)\right] \vee \theta_\gamma = \mu_\gamma \wedge \left[\left(\bigwedge_{\alpha\neq\gamma}\mu\,\alpha\right) \vee \theta_\gamma\right] =$$

$$= \mu_\delta \wedge \tau = \mu_\gamma$$

S-a aplicat legea de modularitate pentru $\mu_\gamma \geqslant \theta_\gamma$. Din condiția de $\bigwedge$-independență a mulțimii C, rezultă :

$$\left(\bigwedge_{\alpha\neq\gamma}\mu_\alpha\right) \vee \theta_\gamma \geqslant \left(\bigwedge_{\alpha\neq\gamma}\theta_\alpha\right) \vee \theta_\gamma = \tau$$

Deci are loc relația : $\left(\bigwedge_{\alpha\neq\gamma}\mu_\alpha\right) \vee \theta_\gamma = \tau$. Am arătat astfel că $f: \mathcal{C}(U) \to \prod_{\gamma\in\Gamma}[\theta_\gamma)$ este un izomorfism laticeal.

BIBLIOGRAFIE

1. Birkhoff, G., Lattice Theory. AMS Colloq, 3 ed. Providence, 1967.
1. P. Crawley and R. P. Dilworth, Algebraic Theory of Lattices, Prentice-Hall, Inc. Englewood, New Jersey 1973.

CONGRUENCES C-TRANSLATES

(RÉSUMÉ)

Dans le present travail sont étudiées les congruences C-translates $C \subseteq \mathcal{C}(U)$, definies par la condition : $\theta = \bigwedge \psi_\theta(C)$. Pour une famille des congruences $\{\theta_\gamma)\ \gamma \in \Gamma\} \subseteq \mathcal{C}(U)$, sont donnés des conditions suffisantes pour l'existence la relation : $\mathcal{C}(U) \cong \prod_{\gamma\in\Gamma}[\theta_\gamma)$.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia“ Timişoara

Tom. 27 (41) **Fascicola 1**

MATEMATICĂ—FIZICĂ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ ОПЕРАТОРОВ КОСИНУС И СИНУС

от

Г. Бабеску

Primită la redacţie la 11 VII 1980.

Цель данной работы состоит в изыскании спектральных свойств функций со значениями операторов, принадлежащих семьям косинус и синус. В работе обозначим через Z, R, K соответственно множество целых, действительных и комплексных чисел. Обозначим через X любое пространство Банах над полем K, а через $B(X)$ алгебру Банах операторов, линиарных и ограниченных на X. Считаем линиарные превращения T, во общем неограниченные с областью определения $D(X)$ и областью значений $R(T)$ содержанных в таком же пространстве X. Для линиарного оператора $T: D(T)\to R(T)$, считается линиарным оператором $T_\gamma=\lambda I-T$, $\lambda\in K$ произвольный, а I идентичный оператор.

Изучение множества значений $\lambda\in K$, для которых T_λ не имеет обратного элемента и изучение свойств обратного T_λ, когда данный оператор существует, составляет содержание так называемой спектральной теорией операторов. Для описания T важную роль играет нахождение тех значений $\lambda\in K$, для которых T_λ имеет обратный и свойства обратного оператора.

1. В первую очередь напоминаем несколько определений.

Определение 1.1. ([6]). Множество значений $\lambda\in K$, для которых T_λ обладает обратным ограниченным элементом $R(\lambda, T)$ с областью определения плотной в X представляет собой резолвентное множество $\rho(T)$ для T ($R(\lambda, T)$ называется резолвентным оператором T); значения $\lambda\in K$, для которых T допускает обратный неограниченный с областью определения плотной в X представляет непрерывный спектр $C_{\sigma(T)}$ для T; значения $\lambda\in K$, для которых T_λ допускает обратный элемент с область определения неплотной в X представляет собой вычетный спектр $R_{\sigma(T)}$ для T; значения $\lambda\in K$, для которых T_λ не имеет обратного элемента представляет собо точечный спектр, $P_{\sigma(T)}$. Множество $\sigma_{(T)}=C_{\sigma(1)}\cup R_{\sigma(T)}\cup P_{\sigma(T)}$ называется спектром T.

Классификация спектральных свойств операторов T_λ для λ фиксированного возможно делать с помощью понятий, данных:

Определением 1.2. ([6]). Скажем, что оператор T иммет свойства:
P_1: если T не однозначный, то есть существует $x_0\in X$, $x_0\neq 0$, $c\ T(x_0=0$;
P_2: если $R(T)$ не плотное в X;
P_3: если существует ряд $\{x_n\}\subset D(T)\ c\ \|x_n\|=1$ и $\|T(x_n)\|\to 0$.

Определение 1.3. Функция оператор косинус — непрерывная в пространстве Банах X, является отображением $C: R \to B(X)$. проверяющее условия :

i) $C(s+t)+C(s-t)=2C(s)\,C(t)$, $\forall s,t \cup R$;

ii) $C(o)=I$ (идентичный оператор) ;

iii) $C(t)$ x непрерывная в t на R, для каждого фиксированного $x \in X$, то есть из $t \to t_0$ следует $C(t) \to (t_0)$ в сильной топологии операторов $B(X)$.

Определение 1.4. Инфинитизимальный генератор семьи косинус сильных непрерывных операторов $\{C(t); t \in R\}$, оператор $G_2 : X \to X$ определен :

$G_2 x = (d^2/dt^2)\ C(o)\,x$,

с областью $D(G_2)=\{x \in X;\quad C(\cdot)\,x \in C^2(R, X)\}$ плотно о пределенный на X.

В работах [2], [7], [11], могут быть найдены различные о характеризования инфинитизимальных генератор.

В доказательствах спектральных теорем сильных функций операторов косинус можно использовать :

Лемму 1.1. [8, I]. Если $\{C(t); t \in R\}$ семья косинусов твердых непрерывных операторов с образующим G_2 и $a \in K$, тогда

$$S(t; a)\,x = \int_0^t sha\,(t-s)\,C(s)\,x\,ds, \quad x \in X \tag{1.1}$$

определяет линиарный неограниченный оператор в X для, которого

$$G_2 S(t; a)\,x = a^2 S(t; a)\,x + a\{C(t) - ch(at)\}x, \quad x \in X \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. Если $\{C(t); t \in R\}$ является семьей косинусов сильных непрерывных операторов с инфинитизимальным образующим G_2, тогда $ch\{t\sqrt{\sigma(G_2)}\} \subset \sigma\{C(t)\}$. Подобные отношения имеют место если напишем в обоих сторонах соответственно P_σ (для $t \neq 0$), C_σ и R_σ вместо σ.

Доказательство. Очевидно возможно предположить, что $t \neq 0$. Если $a \in K$, $a \neq 0$, то для $x \in D(G_2)$, из леммы 1.1 следует

$$\frac{1}{a}\int_0^t sh\,(t-s)\,C(s)\{a^2 - G_2\}x\,ds = \{ch\,(at) - C(t)\}x. \tag{1.3}$$

С другой стороны, для $x \in D(G_2)$ из [10], 2.15 получаем

$$\int_0^t (t-s)\,C(s)\{a - G_2\}x\,ds = \{chs - C(t)\}x \tag{1.4}$$

Предлагаем тепер $a^2 \in \sigma(G_2)$. Если $a \neq 0$, тогда (1.3), а если $a=0$, тогда (1.4) заставляет, что если $a^2 - G_2$ имеет спектральные свойства P_i ($i = \overline{1.3}$), тогда и $\{ch(at) - C(t)\}$ имеет такие же спектральные свойства, что дает подверждения теоремы.

Теорема 1.2. Если $t \in R$, $t \neq 0$, $p \in P_\sigma\{C(t)\}$ и $\{r_n\}$ является множеством комплексных чисел, представляющих решения уравнения $ch\,(rt) = p$, тогда $r_n^2 \in P_\sigma(G_2)$ для всех n. Следовательно

$$ch\{t\sqrt{P_\sigma(G_2)}\} = P_\sigma\{C(t)\}.$$

Доказательство. Если $a \in K$, а $\neq 0$ и $ch(at) \in \rho\{C(t)\}$, тогда $R(ch(at)\ ;\ C(t))$ коммутирует с $S(t\ ;\ a)$ и согласно предыдущей теореме, $a^2 \in \rho(G_2)$, а из леммы 1.1 получим :

$$R(a^2\ ;\ G_2) = \frac{1}{a}\, s(t\ ;\ a)\, R(ch(at\ ;\ C(t)) \tag{1.5}$$

Предполагаем $p \in P_\sigma\{C(t),\ t \neq 0$ и пусть $M = \{x \in X : C(t)\ x = px\}$ Тогда M линиарное замкнутое непустое подпространство для X, неизменяемое для $\{C(s)\ ;\ s \in R\}$. В дальнейшем в доказательстве обозначим через $\{C(t)\ ;\ t \in R\}$ и G_2 ограничения этих операторов на пространстве M. Таким образом, если $ch(at) \neq p$, тогда $ch(at) \in \rho\{C(t)\}$ и из (1.5). следует :

$$R(a^2\ ;\ G_2) = \frac{1}{a}\,(ch(at) - p)^{-1} S(t\ ;\ a),\ \ (a \neq 0) \tag{1.6}$$

Если для определенных $r_n \in K$, для которых $ch(r_n t) = p$, $S(t\ ;\ r_n)$ не нулевой оператор на M, тогда из (1.6) разрешающей $R(v\ ;\ G_2)$ обладает одним полюсом в $v = r_n^2$, то есть $r_n^2 \in P_\sigma(G_2)$ даже если G_2 распространен на весь $D(G_2)$ и таким образом теорема является справедливой. Следовательно предположим, что $S(t\ ;\ r_n) = 0$ на M для любого r_n, для которого $ch(r_n t) = p$. Поставим $\{r_n\} = \{a_n\} \cup \{b_n\}$, где $a_n = a_0 + i\,\frac{\pi}{t}\,2n$, $b_n = -a_0 + i\,\frac{\pi}{t}\,2n$, $n \in Z$ все решения вышеуказанного уравнения. Из данного предположения для $x \in M$, получим :

$$\int_0^t C(t-s)\ sh(a_0 s) \cos\left(\frac{\pi}{t}\,2ns\right) x\,ds = \int_0^t C(t-s)\, ch(a_0 s) \sin\left(\frac{\pi}{t}\,2ns\right) x\,ds = 0 \tag{1.7}$$

$C(t)$ четная функция, можно предполагать $t > 0$. Фиксируя $x \in M$ и определяя $f, g : R \setminus \{nt\ ;\ n \in Z \to x$, периодические с периодом t и для $s \in (0,\ t)$ имеем :

$$f(s) = C(t-s)\, ch(a_0 s)\, x,\ g(s) = C(t-s)\, sh(a_0 s) x \tag{1.8}$$

Тогда коэффициенты Фурие синусов f и коэффициенты косинусов g исчезают из (1.7) и их ряды Фурие являются (C, 1) — суммирующие соответственно к $f(t)$ и $g(t)$, для $s \in (a, t) + nt, n \in Z$. Отсюда следует, что f четная и g нечетная, то есть для $s \in (0,\ t)$ на M получим :

$$C(s)\, e^{a_0 s} = C(t-s) = C(s)\, e^{-a_0 t} \tag{1.9}$$

Поскольку $M \neq \varnothing$, то есть не можем иметь $C(s)\, M = \{0\}$ для $s \in (a,\ t)$ следует $e^{a_0 t} = \pm 1$ и $p = ch(a_0 t) = 1$ или $p = -1$. Но если $e^{a_0 t} = -1$, из (1.9), $C\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ на M и $C\ (s+t) = -C(s)$, для $s \in R$.

Возможно показать, что $E(s) = C(s) + iC\left(s + \frac{t}{2}\right)$ сильная непрерывная группа операторов, для которых $E(t) = -I$ и образующий которого G удовлетворяет $G^2 = G_2$. Тогда $-1 \in P_\sigma\{E(t)\}$ и теорема ([6], 16.7.2) дает для произвольного $r \in K$, для которого $ch(rt) = -1$, $r^2 \in P_\sigma(G)$ следовательно $r^2 \in P_\sigma(G_2)$ имеет место, даже если G_2 распространен на весь $D(G_2)$. Наконец, если $e^{a_0 t} = 1$, тогда используя (1.9) можно показать,

что на M, $C(s)$ периодическая с периодом t и $P_\sigma(G_2)=\sigma(G)\neq\varnothing$ и $P_\sigma(G_2)\subset$ $\subset\{r_n^2\}$ таким образом доказательство закончено.

Теорема 1.3. Если $p\notin R_\sigma\{C(t)\}$ и $\{r_n\}$ множество комплексных решений уравнения $ch(rt)=p$, тогда

(i) $r_n^2\in R_\sigma(G_2)$, $\forall n\in N$;

(ii) $r_n^2\notin P_\sigma(G_2)$, $\forall n\in N$.

Доказательство. Заметно, что $\{C(t)\ ;\ t\in R\}$ коммутирует G_2 в смысле определения 14.3.2 [6], значит, что есть $w\geqslant 0$, при котором $Rev>w$ привлекает:

$$R(v^2;G_2)C(t)x=\frac{1}{v}\int_0^\infty e^{-vu}C(u)C(t)xdu=C(t)R(v^2;G_2)x,\quad x\in X \tag{1.10}$$

Применяя теперь следствие теоремы 14.3.3 [6] следует, что $pI-C^\circ(s)$ ($C^\circ(s)$ сопряженный $C(s)$) обладает свойством P_1, точас, что $pI-C(s)$ имеет свойство P_2. Согласно теореме 16.7.2([6]) примененной при полугруппах сопряженных операторов, следует, что корень r_n^2 уравнения $ch(rt)=p$ находится в $P_\sigma(G_2)$. Из вышеуказанных согласно теореме 14.3.3 ([6]), $r_n^2 I-G_2$ обладает свойством P_2. Одновремено никакой из корней уравнения $ch(rt)=p$ не принадлежают $P_\sigma(G_2)$, значит на основу теоремы 16.7.1 ([6]) p расположен в $P_\sigma\{C(s)\}$, откуда вытекает, что $r_n^2\in R_\sigma(G_2)$, $\forall n\in N$ и таким образом теорема проверена.

Теорема 1.4. Если $p\in C\{C(t)\}$ и $\{r_n\}$ множество комплексных решений уравнения $ch(rt)=p$, тогда:

(i) $\{r_n^2\}\subset C_\sigma(G_2)\cup\rho(G_2)$

или

(ii) $r_n^2\in\rho(G_2)$

Доказательство. Первая часть получена из теоремы 1.1. Для проверки второй части считаем $X=l_2$ и для $\{z_n\ ;\ n=1,2,\ldots\}\in l_2$, $\gamma\in R$ ставим $C(t)\{Z_n\}=\{\cos(nt)Z_n\}$. Тогда $G_2\{z_n\}=\{-n^2 z_n\}$ с $D(G_2)=$

$$=\left\{\{z_n\}\in l_2\,;\sum_{n=1}^{\infty}n^4|z_n|^2<\infty\right\}\text{ и }\sigma(G_2)=P_\sigma(G_2)=\{-n^2\,;\,n=1,2,\ldots\}.$$

Очевидно $P_\sigma\{C(1)\}=\{\cos n\,;n=1,2,\ldots\}$ но если $L\subset R$ любое плотное множество, $L-[-1,1]\subset\rho\{C(t)\}$ и теорема 1.3 заставляет $C_\sigma\{C(1)\}=$ $=[-1,1]-\{\cos n\,;\,n=1,2,\ldots\}$ значит, что и вторая часть этой теоремы веряется.

Теорема 1.5. Существует пространство Банах и функция оператор косинус $\{C(t)\ ;\ t\in R\}\subset B(X)$, при которых множества:

$$E=\{t\,;\,0\in\rho\{C(t)\}\},\quad F=\{t\,;\,0\in P_\sigma\{C(t)\}\},\quad H=\{t\,;\,0\in C_\sigma\{C(t)\}\}$$

плотные в R.

Доказательство. Принимаем $X=l_2$ и для $x=(x_1,\ x_2,\ldots x_n\ldots)\in l_2$ и $t\in R$, как и в теореме 1.4 определяем $C(t)x=\{(\cos nt)x_n\ ;\ n=1,2,\ldots\}$. Если t и π два рациональные независимые числа, тогда согласно теореме аппроксимации Кронекера ([6]) стр. 160), множество $P_\sigma\{C(t)\}=$ $=\{\cos nt\,;\,n=1,2,\ldots\}$ плотное в интервале $[-1,1]$ и очевидно $0\notin P_\sigma\{C(t)\}$

Согласно теореме 1.4 следует $0 \in C_\sigma\{C(t)\}$. Учитывая, что $C(t)$ однозначное применене и числа $t=q\pi$ *си* q ирациональным являются плотными в R, теорема имеет место для множества H. Предложим тепер $t=\frac{p}{r}\pi, r>0$ и p простые числа между ними. Тогда $\cos(n+2r)t=\cos nt$, таким образом множество $\{\cos nt; n=1,2\ldots\}$ содержает не более $2r$ различных значений. Если никакой из них не является нолью, тогда для любого $x=(x_1, x_2,\ldots) \in X$, $C(t)^{-1}x=\{(\cos nt)^{-1}x;\ n=1,2,\ldots\}$, то есть $0 \in \rho\{C(t)\}$. Но если, одно из отношений $\cos nt$ является нолью, тогда очевидно $0 \in P_\sigma\{C(t)\}$. Но отношение $\cos npr^{-1}\pi=0$ имеет место по крайней мере для одного целого положительного n если и только если p нечетный и r четный; следует, что $E=\left\{t;\ t=\pi\frac{\text{целое}}{\text{нечетное}}\right\}$, $F=\left\{t;\ t=\pi\frac{\text{нечетное}}{\text{четное}}\right\}$ и теорема проверена в полность. Больше, $R=E\cup F\cup H$.

2. Известно, что ([1], стр. 136) является самое общее решение функционального уравнения:

$$S(s+t-\alpha)-S(s-t+\alpha)=2S(s)S(t),\quad \forall (s,t)\in R\times R,\ \alpha\in K \tag{2.1}$$

когда $S: R\to R$ непрерывное имеет форму

$$S(t)=\sin ct,\ \text{где}\ c=0\ \text{или}\ c=(4k-1)\pi/2\alpha \tag{2.2}$$

В данном сечении считаем функции со значениями операторов $S: R\to R$, проверяющие (2.1) с решениями предложенными непрерывными в твердой топологии $B(X)$.

Определение 2.1 [9] Скажем, что отображение $S \in V(\alpha)$ если $S: R\to B(X)$ и проверяется (2.1.) Если больше S нечетное тогда скажем, что $S \in V_0(\alpha)$.

В дальнейшем обозначим

$$S^+(s)=[S(s)+S(-s)]/2,\ S^-(s)=[S(s)-S(-s)]/2 \tag{2.3}$$

четную и нечетную част S.

Определение 2.2. Скажем, что $S\in V_0(\alpha, B(X), J, A)$ если $S: R\to B(X)$ проверяющие (2.1), $S^-(-\infty)=J$ оператор проекция идемпотентный $S^+(2\alpha)=A$ и S сильная измеримая функция оператор. Если больше S и нечетная (что привлекает $A\equiv 0$), тогда скажем, что $S\in V_0(\alpha, B(X), J)$.

Определение 2.3. Если $S\in V_0(\alpha, B(X), J)$ и $JS(s)=S(s)J=S(s)$, $s\in R$ поставим $C(s)=S(s-\alpha)$ и $E(s)=S(s-\alpha)+iS(s)$ и называем функциями C и E ассоцированные $S\in V_0(\alpha, B(X), J)$.

Очевидно, если $S\in V(\alpha, B(X), J, A)$, тогда S^- и функция E ассоцирована с S^- также сильные измеряемые и следует что E и S непрерывные в топологии $B(X)$.

Теорема 2.1. Пусть в любая алгебра над полем K и отображение $S: R\to B$, $S\in V_0(\alpha)$. Тогда $S(-\alpha)=j$ идемпотентное и $jS(s)=S(s)j=S(s)$, $\forall\ s\in R$, но функции C и E ассоцированные удовлетворяют уравнению косинуса (уравнение Даламберта) и соответственно уравнениям:

$$E(s+t)=E(s)E(t),\ E(s+\alpha)=-iE(s) \tag{2.4}$$

Наоборот, если $E: R\to B$ удовлетворяет (2.4) тогда $S(s)=[E(s)-E(-s)]/2i$ $E\in V_0(\alpha)$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

Доказательство. Из $S \in V_0(\alpha)$ следует $S(0)=0$. Применя $s=0$ в (2.1), получим :

$$S(t+\alpha)=S(-t+\alpha), \tag{2.5}$$

которое вместе с (2.1) заставляет $S(s)\,S(t)=S(t)\,S(s)$, $\forall\, s,t\in R$. Снова принимая $s=-\alpha$ из $S\in V_0(\alpha)$ получим $S(t)=S(-\alpha)\,S(t)$, $t\in R$ и значит $S(-\alpha)=j$ идемпотентное. Используя теперь (2.5) и нечетность S следует :

$$S(s+\alpha)=-S(s-\alpha), \quad \forall\, s\in R, \tag{2.6}$$

и считая теперь (2.1) для $(s-\alpha,\ t-\alpha)\in R\times R$ получим :

$$S(s+t-\alpha)+S(s-t-\alpha)=2S(s-\alpha)\,S(t-\alpha) \tag{2.7}$$

которое точное уравнение Даламберта для функции $C(s)=S(s-\alpha)$. На основу определения E (определение 2.3) получим :

$$E(s)\,E(t)=C(s)\,C(t)-S(s)\,S(t)+i\,[S(s)\,C(t)+C(s)\,S(t)].$$

Надо ещё проверять если E проверяет (2.4). Для этого учитываем поочереди определение $C(s)$ и отношения (2.6), (2.7) и получим соотношение характеризующее косинус суммы, то есть :

$$C(s)\,C(t)-S(s)\,S(t)=C(s+t) \tag{2.8}$$

По аналогии из (2.1) и (2.6) учитывая определение C получим

$$S(s)\,C(t)+C(s)\,S(t)=S(s)\,S(t-\alpha)+S(s-\alpha)\,S(t)=[S(s+t)-S(s-t+2\alpha)+$$
$$+S(s+t)-S(s-t)]/2=S(s+t),$$

отношение характеризующее синус суммы, то есть :

$$S(s)\,C(t)+C(s)\,S(t)=S(s+t) \tag{2.9}$$

значит имеет место первое из отношений (2.4).

Последнее соотношение (2.4) вытекает из определения E, C и (2.6) так :

$$E(s+\alpha)=C(s+\alpha)+i\,S(s+\alpha)=S(s)-i\,C(s)=-i\,E(s).$$

Для проверки обратного соотношения замечаем, что $E(s-\alpha)=i\,E(s)$ и вычисляем $S(s+t+\alpha)-S(s-t+\alpha)=[E(s+t+\alpha)-E(-s-t-\alpha)-E(s-t+$ $+\alpha)+E(-s-t-\alpha)]/2i=[-iE(s+t)-iE(-s-i)+iE(s-t)+tE(-s+t)]/2i=$ $=2S(s)\,S(t)$. Очевидно S нечетная и следовательно $S\in V_0(\alpha)$ то, что заканчивает доказательство теоремы.

Определение 2.4. Пусть $S\in V(\alpha, B(X), J, A)$. Если существует предел $S'(s)\,x=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{S(s+t)-S(s)}{t}\,x$ в сильной топологии на X, тогда напишем, что $x\in D\{S'(s)\}$, а оператор $S'(0)$ обозначен $G_0=G_0(S)$ называется генератором оператором S.

Лемма 2.1. Пусть $S\in V(\alpha, B(X), J, A)$ и S^- как выше. Тогда имеют место сле дующие :

1° $S\in V_0(\alpha, B(X), J)$ и $x\in D(G_0)\Rightarrow x\in D\{S'(s)\}$, $S(s)\,x\in D(G_0)$ и

$$S'(s)x=S(s-\alpha)\,G_0x=G_0S(s-\alpha)x- \quad \forall\, s\in R;$$

2° $S\in V(\alpha, B(X), J, A)\Rightarrow$ a) $G_0(S)=G_0(S^-)$;

b) $D(G_0)\subset D\{C'(s)\}$, $\forall\, s\in R$ и $x\in D(G_1)\Rightarrow G_1x=0$

Больше

$$G=iG_0 \text{ и } G_2=-G_0^2 \text{ в котором } E'(0)=G,\ G_1=C'(0) \text{ и } G_2=C''(0),$$

где области прямолинейных частей составлены из тех $x\in X$, для которых соответствующие производные существует в твердой топологии над X.

Доказательство. 1°. Из твердой непрерывности S и делением (2.1) на t, после чего заменив $(s,\ t)$ через $\left(s-\alpha+\frac{t}{2},\ \frac{t}{2}\right)$ получим

$$S'(s)x=\lim_{t\to 0}\frac{S(s+t)-S(x)}{t}x=\lim_{t\to 0}\frac{S(s-\alpha+t/2)\quad S(t/2)}{t/2}x=S(s-\alpha)G_0x. \quad 2.10)$$

С другой стороны, для $x\in D(G_0)$ из определения G_0 следует

$$G_0\,S(s-\alpha)x=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}S(t)S(s-\alpha)x=\lim_{t\to 0}\frac{S(s+t)-S(s-t)}{2t}x=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot\frac{S(s+t)-S(s)-[S(s-t)-S(s)]}{t}x=S'(s)x$$

существует благодаря (2.10) и 1° проверяется.

2° а получаем таким образом : если $x\in D\{G_0(S^1)\}$, тогда

$$G_0(S)x=\lim_{s\to 0}\frac{S^-(s)}{s}x=\lim_{s\to 0}\frac{S(s)-S(-s)}{2s}x=\lim_{s\to 0}\frac{S(s)-S(0)-[S(-s)-S(0)]}{2s}$$

также существует и $G_0(S^-)x=G_0(S)x$. Обратно, если $x\in D\{G_0(S^-)\}$ тогда из 1° $x\in D\{S^{-\prime}(\alpha)\}$, $S^{-\prime}(\alpha)x=0$. Учитывая разложение S в зависимости от её четной и нечетной части получим

$$\lim_{s\to 0}\frac{S^+(s)-S^+(0)}{s}x=A\lim_{s\to 0}\frac{S^-(s+\alpha)-S^-(\alpha)}{s}x=0$$

и таким образом существует :

$$G_0(S)x=\lim_{s\to 0}\frac{S(s)-S(0)}{s}x=\lim_{s\to 0}\frac{S^-(s)}{s}x=G_0(S^-)x,$$

заканчивающее 2° а.

Для проверки 2°. b, используем 1° и 2°.a, которые для $x\in D(G_0)$ привлекают $C'(s)x=S^{-\prime}(s-\alpha)x=-S^-(s)G_0x$ для $s\in R$ Больше $G_1=C'(0)=-S^-(-\alpha)$, а на основе (2.5) и (2.6) $S^-(t-\alpha)=S^-(-t-\alpha)$, $x\in D(G_1)$ следует

$$G_1x=\lim_{t\to 0}\frac{S^-(-\alpha+t)-S^-(-\alpha)}{t}x=\lim_{t\to 0}\frac{1/2\,[S^-(-\alpha+t)+S^-(-\alpha-t)]-S^-(-\alpha)}{t}x=$$

Если $x\in D(G_0)$, тогда $x\in D(G_1)$ и существует

$$Gx=\lim_{t\to 0}\left[\frac{C(t)-C(0)}{t}x+i\frac{S^-(t)}{t}x\right]=iG_0x$$

а $x\in D(G)$ заставляет :

$$G_0x=\lim_{t\to 0}\frac{-i}{2}\left[\frac{E(t)-E(0)}{t}x+\frac{E(-t)-E(0)}{-t}x\right]=\frac{1}{i}Gx,\quad G=iG_0.$$

Для того, чтобы проверить последнюю часть считаем x $t\neq 0$. Тогда $\frac{C'(t)-G_1}{t}x=-\frac{S^-(t)\,G_0x}{i}$, то есть $D(G_0^2)\subset D(G_2)$, а $x\in D(G_0^2)$ привлекает

$G_2x=-G_0^2x$. Если ставим $X_1=JX$, $X_0=(I-J)X$, тогда $X=X_0\oplus X_1$ прямая сумма X_0 и X_1. Из теоремы (2.1) следует, что G_0, G, G_2 идентично нулевые на X_0, но на X_1, $E(s)$ находится группа сильная непрерывных операторов, а $C(s)$ функция оператор косинус, сильные непрерывная ([10]) в которой $C(0)=J$ идентичный оператор в X_1. Если $\overline{G_0}$, $\overline{G}$, $\overline{G^2}$ соответственных органичения операторов на X_1, будет тогда существовать $v>0$ чтобы $z>v$ привлекала $z^2\in\rho(\bar{G}_2)$, $z\in\rho(\bar{G})\bigcap\rho(-\bar{G})$. Отсюда $z^2\in\rho(\bar{G}_2)$ с $(z^2J-\bar{G}_2)\ D\ (\bar{G}_2)=X_1=(z^2J-\bar{G}_2)$ Поскольку операторы обеих сторон однозначные следует $D(\bar{G}_2)=D(\bar{G}^2)$; откуда $D(G_0^2)=D(G^2)=D(G_2)$, $G_2=-G_0^2$ и доказательство леммы полное.

Теорема 2.2. Пусть $S\in V_0(\alpha, B(X), I)$ и $\gamma_n=\frac{\pi}{2\alpha}(4n-2)$, $n\in Z$. Тогда спектр $G_0=S'(0)=G_0(S)$ вполностью точечный и пустой, то есть $\varnothing\neq\neq\sigma(G_0)\subset\{\gamma_n;\ n\in Z\}$.

Доказательство. Пусть E группа операторов ассоцирована S. Тогда $E(\alpha)=-i$ и собственное значение $-i$ единый елемент $\sigma\{E(\alpha)$. Поскольку G — оператор определяющий E, тогда согласно ([6], 16.7), $\varnothing\neq P_\sigma(G)\subset\sigma(G)\subset\{\beta_n;\ n\in Z\}$ где $\beta_n=i\gamma_n$ и таким образом лемма 2.1. b привлекает подтверждение $\sigma(G_0)$ исключая случай $P_\sigma(G_0)=\sigma(G_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczel J., Lectures on Functional Equations and Their Application. Academic Press New-York-London 1966, Math. i Science and Engineering, vol. 19.
2. Babescu Gh., Über Kosinus Familien von liniaren stark stetigen Operatoren und ihren infinitesimalen Generatoren, (apare în Bul. şt. şi tehn. IPT, Fasc. 1 (1980).
3. Butzer P. and Berens, Semi Groups of Operators and Approximation, Berlin, 1967.
4. Fattorini, H. O., Ordinary differential equations in linear topological spaces, I—II, J. Diff. Eq. 5 (1969).
5. Giusti E., Funzioni coseno periodiche, Boll Unione Mat. Italiana, 22 (1967).
6. Hille E., Phillips R., Functional Analysis and Semi-Groups, 1957.
7. Lutz D., Which operators generate cosine operator functions? Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti, vol. LXIII-Fasc. 5, Nov. 1977.
8. Nagy B., On cosine operator functions in Banach spaces, Acta Sci. Mat. 36 (1974), II. Cosine operator functions and the abstract Cauchy problem, Pericol Math. Hung. Vol. 7 (3—4), 1976.
9. Nagy B. A., sine functional equation in Banach algebras, Publ. Math., Tomus 24 (1—2), 1977.
10. Sova M., Cosine operator functions, Rozprawy Mat. XLIX, 1966.
11. Travis C. C. and Webb G. F., Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations, Acta Math. Acad., Sci. Hung., Tomus 32 (3—4), 1978.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom. 27 (41) Fascicola 1
MATEMATICĂ—FIZICĂ

ASUPRA Ω—Γ—SUBMĂSURABILITĂŢII APLICAŢIILOR MULTIVOCE

DE
OCTAVIAN LIPOVAN

Primită la redacţie la 9 X 1980.

1. Introducere.

Luînd drept punct de plecare familiile de submăsuri Ω şi Γ, precum şi inelele topologice de mulţimi asociate acestora în [5] a fost introdusă după modelul Dunford-Schwartz [3 p. 106] noţiunea de „aplicaţie multivocă submăsurabilă", punîndu-se în evidenţă o serie de conexiuni între familiile de submăsuri şi spaţiile de aplicaţii multivoce submăsurabile corespunzătoare.

În prezenta lucrare, se dă o condiţie echivalentă pentru Ω- Γ-submăsurabilitatea aplicaţiilor multivoce într-un cadru mai restrictiv prin intermediul noţiunii de „submăsură de control".

2. Ipoteze generale.

Fie X o mulţime nevidă iar $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ o subalgebră a mulţimii părţilor lui X. Dacă $\Gamma = \{\gamma_t : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+\}_{t \in I}$ este o familie nevidă de submăsuri, pe $\mathcal{B}$ atunci din [2], rezultă că există o topologie unică τ_Γ pe $\mathcal{P}(X)$ indusă de o structură uniformă, astfel că $\mathcal{P}(X)(\Gamma) = (\mathcal{P}(X), \Delta, \cap, \tau_\Gamma)$ este un inel topologic prin raport cu operaţiile de diferenţă simetrică şi intersecţie, iar $\mathcal{B}(\Gamma) = (\mathcal{B}, \Delta, \cap, \tau_\Gamma)$ este subinelul topologic $\mathcal{B}$, dotat cu topologia indusă.

Conform unei terminologii consacrate, vom zice că submăsura $\gamma : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ este σ—subaditiva dacă pentru orice şir $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ din $\mathcal{B}$, astfel că $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$ are loc: $\gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(E_n)$.

Dacă γ este σ-subadditivă pe $\mathcal{B}$, atunci şi aplicaţia $\gamma^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}^+}$ definită prin: $\gamma^*_{(A)} = \inf\{\gamma(E) ; A \subseteq E \in \mathcal{B}\}$, pentru $A \subseteq X$, este o submăsură σ-subadditivă pe $\mathcal{P}(X)$.

În ipotezele făcute anterior, se zice că o mulţime $A \subseteq X$ este Γ-neglijabilă} dacă pentru orice $i \in I$, $\gamma_i^*(A) = 0$.

Notăm: $Z_\Gamma = \{A ; A \subseteq X$ şi A este Γ-neglijabilă$\}$. Dacă $\Gamma = \{\gamma\}$ notăm $Z_\Gamma = Z_\gamma$. Se poate arăta că $Z_\Gamma = \{\overline{\varnothing}\}$, unde $\{\overline{\varnothing}\}$ este aderenţa lui $\{\varnothing\}$ în $\mathcal{P}(X)(\Gamma)$. Din [2], sînt cunoscute următoarele afirmaţii:

Remarca 2.1. Fie γ o submăsură σ-subadditivă pe o σ-algebră $\mathcal{B}$ şi fie $\overline{\mathcal{B}}$ aderenţa lui $\mathcal{B}$ în $\mathcal{P}(X)(\gamma)$. Atunci:

(a) $\mathcal{B} \overset{\circ}{\Delta} Z_\gamma = \overline{\mathcal{B}}$ este o σ-algebră.

(b) $Z_\gamma \subseteq \overline{\mathcal{B}}$

(c) Pentru orice $A \in Z_\gamma$, există $E \in \mathcal{B}$ astfel că $A \subseteq E$ şi $\gamma(E) = 0$.

(d) Pentru $A \in \overline{\mathcal{B}}$, există $B \in \mathcal{B}$ şi $N \in Z_\gamma$ astfel că $A = B \cup N$ şi $B \cap N = \varnothing$

Se spune că γ este secvențial continuă dacă pentru orice șir descrescător $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ din $\mathcal{B}$ astfel că $\lim_{n\to\infty} E_n=\varnothing$ are loc $\lim_{n\to\infty} \gamma(E_n)=0$.

Fie $E\in\mathcal{B}$. Se zice că γ este secvențial continuă pe E dacă restricția lui γ la σ-algebra $\mathcal{B}\overset{\circ}{\cap} E$ este secvențial continuă.

Remarca 2.2. Fie γ o submăsură secvențial continuă pe o σ-algebră $\mathcal{B}$. Atunci:

(a) γ este σ-subaditivă.

(b) Dacă $\lim_{n\to\infty} E_n=E$ $(E_n\in\mathcal{B})$, atunci $\lim_{n\to\infty}\gamma(E_n)=\gamma(E)$.

Fiind date două familii nevide de submăsuri pe $\mathcal{B}$, $\Gamma=\{\gamma_i\}_{I\in i}$ și $\Gamma=\{\gamma'_j\}_{j\in J}$, se spune că Γ' este absolut continuă prin raport cu Γ și se notează $\Gamma'\ll\Gamma$, dacă pentru orice $j\in J$ are loc $\lim_{E\to\varnothing,\ \text{in}\ \mathcal{B}(\gamma)}\gamma'_j(E)=0$.

Dacă $\Gamma'\ll\Gamma$ și $\Gamma\ll\Gamma'$ se spune că Γ și Γ' sînt echivalente și se notează $\Gamma'\equiv\Gamma$. Dacă $\Gamma'=\{\gamma'\}$ vom scrie $\gamma'\ll\Gamma$ sau $\gamma'\equiv\Gamma$ în loc de $\Gamma'\ll\Gamma$ sau $\Gamma'\equiv\Gamma$

O importanță deosebită o au familiile numărabile de submăsuri Γ definite pe $\mathcal{B}$ [2].

Remarca 2.3. Dacă Γ este o familie numărabilă de submăsuri σ-subaditive pe o σ-algebră $\mathcal{B}$, atunci există o submăsură finită γ pe $\mathcal{B}$ astfel că $\gamma\equiv\Gamma$. În aceste condiții, $\mathcal{B}(\Gamma)=\mathcal{B}(\gamma)$ este un spațiu semimetric complet cu semimetrica: $d(A,B)=\gamma(A\Delta B)$, $A,B\in\mathcal{B}$.

3. Aplicații multivoce $\Omega-\Gamma-$ submăsurabile.

Fie X o mulțime nevidă, $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(x)$ o σ-algebră de submulțimi din X iar $\Gamma=\{\gamma_i:\mathcal{B}\to\overline{\mathbb{R}^+}\}_{i\in I}$ o familie mevidă de submăsuri pe $\mathcal{B}$.

Fie Y o mulțime nevidă și $\Omega=\{\omega_j:\mathcal{P}(Y)\to\overline{\mathbb{R}^+}\}_{j\in J}$ o familie nevidă de submăsuri pe $\mathcal{P}(Y)$. Se știe [2] că familia Ω induce pe mulțimea $\mathcal{P}(Y)$ a părților lui Y o structură uniformă $\mathcal{P}(Y)(\Omega)=(\mathcal{P}(Y),\ \mathbb{U}_\Omega)$ în care familia $\{H_{k,\varepsilon},\ K\subset I,\ K=\text{finită},\ \varepsilon>0\}$, unde:

$$H_{k,\varepsilon}=\{(A,B);\ (A,B)\in\mathcal{P}(Y)\times\mathcal{P}(Y);\ \omega_j(A\Delta B)<\varepsilon, j\in J\}$$

este bază pentru uniformitatea $\mathbb{U}_\Omega$. Această structură uniformă induce pe $\mathcal{P}(Y)$ o topologie τ_Ω.

Definiția 2.1. Numim aplicație multivocă a lui X în Y, o aplicație a lui X în mulțimea $\mathcal{P}(Y)$ a părților lui Y și o notăm $f:X\to\mathcal{P}(Y)$.

Prin generalizarea modelului stabilit în [3 p. 101–104.], fiecărui K finit, $K\subseteq I$, $\varepsilon>0$ și $\mathcal{U}\in\mathbb{U}_\Omega$, le vom asocia mulțimea:

$$W_k(\mathcal{U},\varepsilon)=\{(f,g)\in[\mathcal{P}(Y)]^X\times[\mathcal{P}(Y)]^X;\ \gamma_i^*\{x\in X;\ (f(x),\ g(x))\notin U\}<\varepsilon,\ i\in K\}$$

Familia $\{W_k(\mathcal{U},\varepsilon)\}$ formează atunci un sistem fundamental de anturaje pentru o structură uniformă $\mathbb{U}_{\Omega=\Gamma}$ pe $[\mathcal{P}(Y)]^X$. Notăm cu:

$$[\mathcal{P}(Y)]^X_{(\Omega-\Gamma)}=([\mathcal{P}(Y)]^X,\ \mathbb{U}_{\Omega-\Gamma}).$$

Definiția 2.2. Zicem că o aplicație multivocă $f:X\to\mathcal{P}(Y)$ este $\mathcal{B}$-etajată dacă există mulțimile:

$$A_i\in\mathcal{P}(Y),\ E_i\in\mathcal{B},\ i=1,2,\ldots n,\ A_i\neq A_j,\ i\neq j,\ E_i\cap E_j=\varnothing,$$

$$i\neq j,\ X=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$$

astfel ca: $\forall x\in E_i$ implică $f(x)=A_i$, $i=1,2,\ldots n$.

Vom nota prin $\mathcal{E}[\mathcal{B}, \mathcal{P}(Y)] \subset [\mathcal{P}(Y)]^X$, spaţiul funcţiilor multivoce $\mathcal{B}$-etajate.

Definiţia 2.3. Zicem că aplicaţia multivocă $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$ este total Ω-Γ-submăsurabilă, dacă f aparţine aderenţei lui $\mathcal{E}[\mathcal{B}, \mathcal{P}(Y)]$ în $[\mathcal{P}(Y)]^X_{(\Omega-\Gamma)}$.

Notăm prin $\mathcal{TM}[\mathcal{B}, \Gamma, \Omega, \mathcal{P}(Y)]$, mulţimea aplicaţiilor multivoce total Ω-Γ-submăsurabile din $[\mathcal{P}(Y)]^X$.

Fie $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i \in I}$ şi fie $F \in \mathcal{B}$. Zicem că, F, este Γ-finită dacă pentru orice $i \in I$, $\gamma_i(F) < \infty$. Vom nota prin Γ_F familia restricţiilor lui γ_i, $i \in I$ la algebra $\mathcal{B} \cap F$.

Definiţia 2.4. Zicem că aplicaţia multivocă $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$ este Ω—Γ-submăsurabilă, dacă pentru orice $F \in \mathcal{B}$, Γ-finită, $f|_F \in \mathcal{TM}[\mathcal{B} \cap F, \Gamma_F, \Omega, \mathcal{P}(Y)]$.

Vom nota prin $\mathcal{M}[\mathcal{B}, \Gamma, \Omega, \mathcal{P}(Y)]$, mulţimea funcţiilor multivoce Ω-Γ-submăsurabile din $[\mathcal{P}(Y)]^X$.

În [5] s-a arătat că au loc incluziunile :

$$\mathcal{E}[\mathcal{B}, \mathcal{P}(Y)] \subseteq \mathcal{TM}[\mathcal{B}, \Gamma, \Omega, \mathcal{P}(Y)] \subseteq \mathcal{M}[\mathcal{B}, \Gamma, \Omega, \mathcal{P}(Y)] \leqslant$$

$$\leqslant [\mathcal{P}(Y)]^X_{(\Omega-\Gamma)}$$

şi că spaţiile $\mathcal{TM}[\mathcal{B}, \Gamma, , \Omega, \mathcal{P}(Y)]$ şi $\mathcal{M}[\mathcal{B}, \Gamma, \Omega, \mathcal{P}(Y)]$ sînt închise în $[\mathcal{P}(Y)]^X$ $(\Omega - \Gamma)$.

4. Submăsuri de control. Un criteriu de $\Omega-\Gamma-$submăsurabilitate a aplicaţiilor multivoce.

În [6] au fost definite şi studiate trei tipuri de convergenţă pentru şiruruile de aplicaţii multivoce : convergenţa în Ω-Γ-submăsuri, convergenţa Ω-Γ-aproape peste tot, şi convergenţa Ω-Γ-aproape uniformă (Ω-Γ-asimptotică).

Definiţia 4.1. Fie $\{f_\alpha\}$ un şir generalizat din $[\mathcal{P}(X)]^X$ şi fie $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$.

(a) Dacă $f_\alpha \to f$ în $[\mathcal{P}(Y)]^X$ $(\Omega - \Gamma)$, vom spune că $\{f_\alpha\}$ tinde către f în Ω-Γ-submăsuri şi notăm $f_\alpha \xrightarrow{\Omega-\Gamma} f$.

(b) Dacă există $A \in Z_\Gamma$, astfel că $f_\alpha(x) \to f(x)$ pentru orice $x \in X - A$, vom spune că $\{f_\alpha\}$ tinde $\Omega - \Gamma -$aproape peste tot la f şi vom nota : $f_\alpha \to f$ a.p.t. $(\Omega - \Gamma)$.

(c) Dacă există un şir generalizat $\{A_\beta\}$ din $\mathcal{P}(X)$ astfel că $A_\beta \to \varnothing$ în $\mathcal{P}(X)$ (Γ) şi că dacă pentru orice β, $f_\alpha(x) \to f(x)$ uniform pe $X - A_\beta$, vom spune că $\{f_\alpha\}$ tinde la f $\Omega - \Gamma$-aproape uniform (sau $\Omega - \Gamma$- asimptotic) şi vom nota prin $f_\alpha \to f$ a.u. $(\Omega - \Gamma)$.

Remarca 4.1. Au loc implicaţiile :

(a) $f \to f$ a.u. $(\Omega - \Gamma) \Rightarrow f_\alpha \xrightarrow{\Omega-\Gamma} f$

(b) $f_\alpha \to f$ a.u. $(\Omega - \Gamma) \Rightarrow f_\alpha \to f$ a.p.t. $(\Omega - \Gamma)$.

Remarca 4.2. Fie $\Omega \equiv \Omega'$ şi $\Gamma \equiv \Gamma'$ unde Ω' este numărabilă iar Γ' este o familie numărabilă de submăsuri σ-subaditive pe $\mathcal{B}$. Dacă şirul $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ şi f sînt din $[\mathcal{P}(Y)]^X$ astfel că $f_n \xrightarrow{\Omega-\Gamma} f$, atunci $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ posedă un subşir care converge $\Omega - \Gamma$-aproape uniform la f.

Definiţia 4.2. Fie Γ o familie nevidă de submăsuri pe o σ-algebră $\mathcal{B}$ de submulţimi ale lui X. O submăsură σ-subadditivă pe $\mathcal{B}$, se zice că este submăsură de control pentru Γ, dacă $\Gamma \equiv \gamma$ şi γ este secvenţial continuă pe orice F. Γ-finită din $\mathcal{B}$.

Rezultatele care urmează vor fi demonstrate în următoarele ipoteze.

Fie X o mulțime nevidă, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ o σ-algebră iar Γ o familie de submăsuri avînd o submăsură de control γ pe σ-algebra $\mathcal{B}$.

Fie Y o mulțime nevidă și $\Omega = \{\omega_j : \mathcal{P}((Y) \to \overline{\mathbb{R}^+}\}_{j \in N}$ o familie numărabilă de submăsuri pe $\mathcal{P}(Y)$.

Lemă. Fie $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}[\mathcal{B}, \mathcal{P}(Y)]$ și $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$, astfel că $f_n \to f$ a.p.t. $(\Omega - \Gamma)$. Atunci pentru orice mulțime F, Γ-finită din $\mathcal{B}$, există un șir $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ (finit sau nu) de mulțimi disjuncte două cîte două din $\mathcal{B} \cap F$, astfel că $F \setminus \bigcup_k F_k \in Z_\Gamma$ și $f_n \to f$ uniform pe F_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Demonstrație. Va fi suficient să facem demonstrația pentru γ în loc de Γ. Fie $Z \in z_\gamma$, astfel că $f_n(x) \to f(x)$ pentru orice $x \in X - Z$. Din remarca 2.1. (c) putem presupune că $Z \in \mathcal{B}$.

Fie $H = F \setminus Z \in \mathcal{B} \cap F$; va fi suficient să demonstrăm proprietatea pentru H. Din remarca 2.3. există o submăsură ω pe $\mathcal{P}(Y)$ astfel că $\omega \equiv \Omega$. Deoarece $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ este din $\mathcal{L}[\mathcal{B}, \mathcal{P}(Y)]$, vom avea pentru $m, n = 1, 2, \ldots$

$$A_{mn} = \bigcap_{p, q \geq n} \left\{ x \in H ; \omega [f_p(x) \Delta f_q(x)] \leq \frac{1}{m} \right\} \in \mathcal{B} \cap H.$$

Deoarece, pentru $x \in H$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ este un șir Cauchy pentru $m = 1, 2, \ldots$, $A_{mn} \nearrow_{n \to \infty} H$, și deoarece γ este secvențial, convențial, continuă pe H, avem: $\lim_{n \to \infty} \gamma(H \setminus A_{mn}) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Pentru $\varepsilon > 0$ și orice m, fie atunci n_m astfel că $\gamma(H \setminus A_{m n_m}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$, și fie $A_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{m n_m} \in \mathcal{B} \cap H$.

Vom avea atunci:

$$\gamma(H \setminus A_\varepsilon) = \gamma\left[\bigcup_{m=1}^{\infty} (H \setminus A_{m n_m})\right] \leq \sum_{m=1}^{\infty} \gamma(H \setminus A_{m n_m}) < \varepsilon,$$

și este evident că $f_n \to f$ uniform pe A. Vom obține deci afirmația luînd un șir de mulțimi disjuncte două cîte două din $\mathcal{B} \cap F$ a căror reuniune este $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1\,\overline{k}}$.

Următoarea teoremă ne furnizează un criteriu pentru $\Omega - \Gamma$-submăsurabilitatea aplicațiilor multivoce.

Teorema. O aplicație multivocă $f \in [\mathcal{P}(Y)]^X$ este $\Omega - \Gamma$-submăsurabilă dacă și numai dacă, pentru orice F, Γ-finită din $\mathcal{B}$:

(a) $f^{-1}(\{A \subseteq Y ; \omega(A \Delta A_0) \leq r\}) \cap F \in \overline{\mathcal{B}}$ $(A_0 \cup Y$, fixată, $r > 0)$ unde $\overline{\mathcal{B}}$ este aderența lui $\mathcal{B}$ în $\mathcal{P}(X)$ (Γ).

(b) Există o parte numărabilă $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(Y)$ și $Z \in Z_\gamma$ astfel că $f(F \setminus Z) \subseteq \overline{\mathcal{D}}$.

Demonstrație. Din ipotezele făcute rezultă că $[\mathcal{P}(Y)^X (\Omega - \Gamma)$ este semimetrizabil [5], deci folosirea șirurilor este justificată.

Necesitatea.

Dacă f este $\Omega - \Gamma$-submăsurabilă, rezultă din definiție, din echivalența $\gamma_F \equiv \Gamma_F$ și din remarca 4.1., 4.2., că există un șir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}[\mathcal{B} \cap F, \mathcal{P}(Y)]$ astfel că $f_n \to f_{|F}$ a.p.t. $(\Omega - \Gamma_F)$. Fie atunci un șir $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ de mulțimi disjuncte două cîte două din $\mathcal{B} \cap F$ astfel că $Z = F \setminus \bigcup_k F_k \in Z_{\Gamma F} \subseteq Z_\Gamma$ și $f_n \to f$ uniform pe F_k, $k = 1, 2, \ldots$ (lema).

Pentru $A_0 \subset Y$ și $r>0$, avem : $f^{-1}(\{A \subseteq Y ;\ \omega(A\Delta A_0) \leqslant r\}) \cap F = \bigcup_k [f^{-1}(\{A \subseteq Y ;\ \omega(A\Delta A_0) \leqslant r\}) \cap F_k] \cup [f^{-1}(\{A \subseteq Y ;\ \omega(A\Delta A_0) \leqslant r\}) \cup Z]$.
Deoarece $f^{-1}(\{A \subseteq Y ;\ \omega(A\Delta A_0) \leqslant r\}) \cap Z \in \overline{\mathcal{B}}$ și $\overline{\mathcal{B}}$ este o algebră (remarca 2.1. (a) și (b)) este suficient să arătăm că :

$$f^{-1}(\{A \subseteq Y ;\ \omega(A\Delta A_0) \leqslant r\}) \cap F_k \in \overline{\mathcal{B}},\ (K=1, 2, \ldots)$$

Dar pentru $m=1, 2, \ldots$, fie n_m astfel că $n \geqslant n_m$ implică $\omega(f_n(x)\Delta f(x)) \leqslant \frac{1}{m}$ pentru orice $x \in F_k$. Deoarece $f_n \in \mathcal{C}[\mathcal{B} \overset{\circ}{\cap} F,\ \mathcal{P}(Y)]$, concluzia rezultă atunci din egalitatea :

$$f^{-1}(\{A \subset Y ;\ \omega(A\Delta A_0) \leqslant r\}) \cap F_k = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqslant n_m} \left\{x \in F_k ;\ \omega(f_n(x)\ \Delta\ A_0) \leqslant r + \frac{1}{m}\right\}$$

Pentru a arăta necesitatea lui (b) este suficient să luăm Z ca mai sus iar $\mathcal{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n\ (F \setminus Z)$.
Suficiența.

Fie F, Γ-finită din $\mathcal{B}$ și fie Z și $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ din ipoteza (b).
Notăm : $F' = F \setminus Z$ și $F_{nm} = F' \cap f^{-1}\left(\left\{A \subset Y ;\ \omega(A_m\Delta A) \leqslant \frac{1}{m}\right\}\right)$, $n, m = 1, 2, \ldots$.
Atunci $F' = \bigcup_m F_{nm}$ $(n=1, 2, \ldots)$ și din (a) și remarca 2.1. rezultă $F_{nm} \in \overline{\mathcal{B}}$
Să notăm atunci :

$$G_{n1} = F_{n1},\ G_{nm} = F_{nm} \setminus \bigcup_{j<m} F_{nj}\ (m>1),$$

astfel că pentru $n=1, 2, \ldots$ mulțimile G_{nm} să fie disjuncte două cîte două, din $\mathcal{B}$ și $F' = \bigcup_n G_{nm}$. Din remarca 2.1., avem că :

$$G_{nm} = G'_{nm} \cup Z'_{nm},\ \text{unde}\ G'_{nm} \in \mathcal{B},\ Z'_{nm} \in Z_\Gamma\ \text{și}\ G'_{nm} \cap Z'_{nm} = \varnothing$$

de unde punînd $Z'_n = \bigcup_m Z'_{nm} \cup Z \in Z_\Gamma$ rezultă că $F = \bigcup_m G'_{nm} \cup Z'_n$ $(n=1, 2, \ldots)$
Vom defini $f_n \in [\mathcal{P}(Y)]^F$, în felul următor :

$$f_n(x) = \begin{cases} A_m & \text{dacă } x \in G'_{nm} \\ A_0 & \text{dacă } x \in Z'_n, \end{cases}$$

unde $A_0 \subset Y$ este arbitrară dar fixată.

Vom avea astfel $\omega(f_n(x)\ \Delta\ f(x) \leqslant \frac{1}{m}$ pentru orice $x \in F \setminus \bigcup_k Z'_k \subseteq \bigcup_{m,n} G'_{nm}$, deci $f_n \xrightarrow{\Gamma_F} f$ și va fi suficient să arătăm că :

$$f_n \in \mathcal{T}\mathcal{M}[\mathcal{B} \overset{\circ}{\cap} F,\ \Gamma\ ,\ \Omega,\ \mathcal{P}(Y)] = \mathcal{T}\mathcal{M}[\mathcal{B} \overset{\circ}{\cap} F,\ \gamma\ ,\ \omega,\ \mathcal{P}(Y)]$$

În cazul cînd pentru un n fixat, avem o infinitate de G'_{nm}, atunci vom defini $f_{nm} \in \mathcal{C}[\mathcal{B} \overset{\circ}{\cap} F,\ \mathcal{P}(Y)]$, $(m=1, 2, \ldots)$ prin expresia :

$$f_{nm}(x) = \begin{cases} f_n(x) \text{ dacă } x \in \bigcup_{j=1}^{m} G'_{nj} \\ A_0 \quad \text{dacă } x \in F \setminus \bigcup_{j=1}^{m} G'_{nj} \end{cases}$$

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar. Deoarece γ este secvențial continuă pe F, rezultă că:

$$\gamma^* \{x \in F ;\ \omega (f_{nm}(x) \Delta f_n(x)) \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{deci} \quad f_{nm} \xrightarrow{\nu_F} f_n.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Berge Claude, Espaces topologiques. Functions multivoques. Dunod, Paris, 1959.
2. Drewnowski L., Topological Rings of Sets, Continuous Sets Functions, Integration I, II, Bull. Acad. Sci. Ser. Sci. math. astr. et phys. 20. nr. 4, 269—286, 1972.
3. Dunford N. and Schwartz J., Linear Operators, Part. I, Interscience, New-York, 1957.
4. Lipovan O., Sur l'intégrabilité des fonctions multivoqués. Matematica. Revue d'analyse numerique et la théorie de l'approximation (a paraître).
5. Lipovan O. Aplicații multivoce submăsurabile. S.I.E.F.A.C. Cluj-Napoca, 1980.
6. Lipovan O. Sur la convergence des suits de fonctions multivoqués (a Paraitre).
7. Masse J. C. Intégrations dans les semi-groupes. Collections mathématique Nr. 23. Département de mathematiques. Université Laval Quebec, 1974.

SUR LA SOUS-MESURABILITÉ DES FUNCTIONS MULTIVOQUÉS

RÉSUMÉ

Dans le présent travail on donne un critère de sousmesurabilité des functions multivoqués a l'aide de la notion de sous-mesure de contrôle.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
Tom. 27 (41) **Fascicola 1**

MATEMATICĂ—FIZICĂ

CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DES SYSTÈMES AUX STRUCTURES COMPLEXES.I. PROBLÈMES À LA FRONTIÈRE POUR CERTAINS SYSTÈMES NON LINÉAIRES AUX OPÉRATEURS HÉRÉDITAIRES ET POLYVIBRANTS, OU BIEN AUX DÉRIVÉES TOTALES AU SENS DE MAURO PICONE, D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

P. CRĂCIUNAŞ [1], U. D'AMBROSIO [2], N. IONIŢĂ [3] et D. MARAVALL CASESNOVES [4]

1. Introduction.

Depuis la naisance des systèmes polyvibrants d'il y a un demi-siècle, [1], dont le prototype est le problème des spectres

$$M_m^{(1)}[A(x)\,M_m^{(1)}u(x)+\lambda\beta(x)\,u(x)]+\lambda[\beta(x)\,M_m^{(1)}u(x)+C(x)\,u(x)]=0,$$

$$u(x)\,|_{\partial R}=0,$$

ou bien ses équivalents variationnels

$$D[f(x)]=\min_f \int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m} A(x)\,[M_m^{(1)}f(x)]^2\,dx,\ f(x)\,|_{\partial R}=0,$$

$$J[f(x)]=\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}[2\beta(x)\,f(x)\,M_m^{(1)}f(x)+C(x)\,f(x)]\,dx=\pm 1 \quad (2)$$

et

$$J^*[f(x)]=\min_f \int_{b_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}[2\beta(x)\,f(x)\,M_m^{(1)}f(x)+C(x)\,f(x)]\,dx,$$

$$D^*[f(x)]=\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m} A(x)\,[M_m^{(1)}f(x)]^2\,dx=1,\ f(x)\,|_{\partial R}=0, \quad (3)$$

dont *la nouveauté* consiste dans le fait que

$$M_m^{(n)}\equiv\partial^{mu}/\beta x_1^n\,\partial x_2^n\dots\partial x_m^n \quad (+)$$

est l'opérateur du n-ième ordre de dérivation totale au sens du profondément regretté MAUTO PICONE, (1885–1977), Maître à nous tous,

$$R=\{a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\dots,m,\ x=(x_1,x_2,\dots,x_m),\ dx=dx_1dx_2\dots dx_m \quad (++)$$

---

[1] Institut Polytechnique de Jassy, Socialist Republic of Romania.
[2] Instituto de Matemática, Estatistica e Ciência da Computaçáo-IMECC-da Universiadade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.
[3] Académie des Hautes Etudes Economiques-ASE- Bucarest, Roumanie.
[4] Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, de Madrid, Espana-Spain.

∂R est la frontière de l'hyperparallélipipède R d'un espace euclidien R^m à m dimensions et dont l'importance comme modèle mathématique de nombreux phénomènes physiques et biologiques devienne de plus en plus appréciée, nombre de modèles qui s'encadrent dans les études des systèmes aux structures complexes ont été considéerés surtout par M. D. Mangeron, L. E. Krivoshein et M. N. Oguztoreli, [2]–[6], ou bien par les auteurs qui ont abordé l'étude de l'équation de Korteweg-de Vries, [7], et des équations non linéaires d'évolution, dont le prototype est l'équation de Sine-Gordon

$$q_{tt}(x, t) - q_{xx}(x, t) = c \sin q(x, t), \tag{4}$$

introduite d'ailleurs par T. H. R. Skyrme, [8], qui n'est qu'un cas particulier des équations polyvibrantes [5], à savoir l'équation polyvibrante non linéaire du premier ordre. Parallélement au développement croissant de différents modèles mathématiques des phénomènes de plus en plus compliqués de la Nature, on assiste à l'essor des méthodes adéquates de résolutions de ceux-ci. En nous bornant ici de faire mention de la *méthode de transformation spectrale inverse*, qui s'avère lors de ces dernières années assez puissante pour la détermination des solutions exactes concernant certaine classe d'équations non linéaires d'évolution, [9], et de la *méthode des équations intégrales*, [10], [11], nous exposerons dans ce qui suit, tout en faisant appel à cette dernière méthode, nombre de résultats concernant l'étude des problèmes à la frontière pour certains systèmes non linéaires aux opérateurs héréditaires et polyvibrants, ou bien aux dérivées totales au sens de MAURO PICONE, d'ordre supérieur.

2. Considérons pour l'équation intégrodifférentiellen non linéaire aux opérateurs polyvibrants d'ordre supérieur

$$M_2^{(3)}[u(x, t)] = f[x, t, u(x, t), M_2^{(1)}[u(x, t)], M_2^2[u(x, t)],$$

$$\int_a^{s(x)} K(x, t, \underline{\xi}, u(\underline{\xi}, t), u'_t(\underline{\xi}, t), u''_{tt}(\underline{\xi} \cdot t))\, d\underline{\xi}, \int_\alpha^{r(t)} N(x, t, \underline{\tau}, u(x, \underline{\tau}),$$

$$u'_x(x, \underline{\tau}), u''_{xx}(x, \underline{\tau}))\, d\underline{\tau}] \equiv \mathcal{L}[u], \tag{5}$$

ou $M_m^{(1)}[u(x, t)] \equiv \partial^2 u(x, t)\, \partial x\, \partial t$ est la *dérivée totale* du premier ordre de M. Picone, $u_x^{(i)}(x, \underline{\tau}) \equiv \partial^i u(x, \underline{\tau})/\partial x^i$, $u_t^{(i)}(x, \underline{\tau}) \equiv \partial^i u(x, t)\, \partial t^i$ et les fonctions $f(x, t, l_1, \ldots, l_5)$, $K(x, t, \underline{\xi}, \underline{l}, l, l)$, $N(x, t, \underline{\tau}, l, l_{10}, l_{11})$, $s(x) \in [a, b]$, $\forall\, x \in [a, b]$, $\underline{\tau}(t) \in [\underline{\alpha}, \underline{\gamma}]$, $\forall\, t \in [\underline{\alpha}, \underline{\gamma}]$ sont définies et continues par rapport à ses argumetns, respectivement, dans les domaines

$$D_1 = DX \prod_{i=1}^{5} [a_i \leqslant l_i \leqslant b_i] \text{ où } D = [a \leqslant x \leqslant b]\ X\ [\underline{\alpha} \leqslant t \leqslant \underline{\gamma}],$$

$$D_2 = D\ X\ [a \leqslant \underline{\xi} \leqslant s(x) \leqslant b]\ X \prod_{i=6}^{8} [a_i \leqslant l_i \leqslant b_i,$$

$$D_3 = D\ X\ [\underline{\alpha} \leqslant \underline{\tau} \leqslant r(t) \leqslant \underline{\gamma}]\ X \prod_{i=9}^{11} [a_i \leqslant l_i \leqslant b_i],$$

$$D_4 = [a \leqslant x \leqslant b],\ D_5 = [\underline{\alpha} \leqslant t \leqslant \underline{\gamma}],\ a, {}_i\, b_i = \text{const.},\ i = \overline{1, 11},$$

---

[5] Les équations polyvibrantes ont été appelées par de nombreux hommes de sciences, tels, par ex., G. D. Birkhoff, W. J. Gordon, L. E. Krivoshein. K. V. Leung, F. Manaresi. D. Mitrinovic, G. M. Nielsem, M. N. Oguztoreli, A. Rosenblatt, F. S. Rossi, M. Salvadori, ... Mangeron' equations". Voir, par ex., [12].

tandis que par rapport aux paramètres l_i ces fonctions satisfont dans les domaines de leur définition aux conditions de Lipschitz avec des coefficients continue et non négatifs

$$L_{it}(x, t),\ i=\overline{1, 5};\ K_{ik}(x, t, \xi),\ i=1, 2, 3;\ L_{iN}(x, t, \tau),\ i=1, 2, 3;$$

le problème à la frontière „bien posé" au sens d'Hadamard, à savoir :

$$(6)\ u_t^{(i)}(x, \alpha)=\varphi_i(x);\ (7)\ u_x^{(i)}(a, t)=\psi_i(t);\ (8)\ \varphi_i^{(i)}(a)=\psi_i^{(i)}=q_i=$$

const.,, ou les fonctions données $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(t)$ satisfont les conditions

$$\varphi_i(x) \in C^{1+i}[a, b],\ \psi_i(t) \in C^{1+i}[\alpha, \gamma],\ i=0, 1, 2.$$

3. Afin de puovoir établir les conditions de résolubilité et de construit les solutions approchées du problème (5) – (8) ci-dessus, utilisons le problème plus simple que suit :

$$M_2^{(2)}[u(x, t)]=\varphi_2''(x)+\psi_2''(t)-q_2+\int_a^x\int_\alpha^t [u]\, d\theta\, d\eta, \tag{9}$$

$$u_t^{(i)}(x, \alpha)=\varphi_i(x);\ (10)\quad u_x^{(i)}(a, t)=\psi_i(t);\ (11)\quad \varphi_i(a)=\psi_i^{(i)}(\alpha)=q_i=$$
$$=\text{const.},\ i=0, 1. \tag{12}$$

Posons

$$M_2^{(2)}[u(x, t)]=v(x, t) \tag{13}$$

et l'intégrons tout en tenant compte des conditions (10) – (12). On obtient

$$u(x, t)=\varphi_0(x)+\psi_0(t)-q_0+[\varphi_1(x)-\varphi_1(a)](t-\alpha)+[\psi_1(t)-\psi_1(\alpha)](x-a)-$$
$$-q_1(x-a)(t-\alpha) \tag{14}$$

$$\int_a^x\int_\alpha^t (x-\xi)(t-\tau)\, Y(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi \equiv h(x, t)+\int_a^x\int_\alpha^t (x-\xi)(t-\tau)V(\xi, \tau)\, d\tau\, d\xi \equiv$$
$$\equiv A[V],$$

ou $v(x, t)$ est la solution de l'équation intégrale

$$V(x, t)=\varphi_2(x)+\psi_2(t)-q_2+\int_a^x\int_\alpha^t [A[v]]\, d\tau\, d\xi \equiv \sigma(x, t)+$$

$$\int_a^x\int_\alpha^t f[\eta, \theta, A[v], M_2^{(1)}(A[v])), v(\eta, \theta), \int_a^{s(\eta)} K(\eta, \theta, \xi, A[v], A_\theta'[v], A_{\theta\theta}''[v]\, d\xi,$$

$$\int_\alpha^\theta N(\eta, \theta, \tau, A[v], A_\eta'[v], A_{\eta\eta}''[v])\, d\tau]\, d\theta d\eta \equiv B[v],$$

ou l'on a mis

$$\sigma(x, t) \equiv \varphi_2''(x)+\psi_2''(z)-q_2.$$

Supposons que les opérateurs A et B appliquent les domaines de leur définition en soi et l'opérateur B est de plus compressible, c'est-à-dire

$$k=\| B \| <1, \tag{16}$$

où $\| B \|$ est la norme de l'opérateur B dans le domaine D_1, définie comme la borne inférieure des nombres réels qui satisfait l'inégalité

$$\max_{D_1} | B[v] | \leqslant k \max_{D_1} | v(x, t) |.$$

Il s'ensuit le suivant

Theoreme 1. *L'équation intégrale* (15) *possède, en vertu de la valabilité du principe de Banach du point fixe concernant l'opérateur B, une solution et une seule* $v=v(x,t)\in C(D)$ *vers laquelle converge la succession* $\{v_i(x,t)\}_0^\infty$ *où on a*

$$V_{i+1}(x,t)=\beta[v_i],\quad i=0,1,\ldots \tag{17}$$

et où encore

$$\|V(x,t)-v_i(x,t)\|\leqslant k\,\|v_0(x,t)-\beta[v_0]\|:(1-k)\xrightarrow[i\to\infty]{}0 \tag{18}$$

$$\|\cdot\|=max\,|\cdot|,\quad v_0(x,t)\in C(D)\subset D_1.$$

En ce que regarde l'ordre de grandeur de l'approximation, on peut dire que suit. Si l'on prend pour la solution approchée du problème ci-dessus la fonction

$$u_i(x,t)=A[v_i],\quad i=0,1,\ldots \tag{19}$$

on en déduit

$$|u(x,t)-u_i(x,t)|\leqslant g(x,t)\,k^i\|v_0(x,t)-B[v_0]\|:(1-k) \tag{20}$$

$\xrightarrow[i\to\infty]{}0$, $\forall\,(x,t)\in D$, où l'on a mis $g(x,t)\equiv[(x-a)(t-\underline{\alpha}):2]^2$

et par suite on aboutit à l'ordre d'approximation prescrit $\varepsilon>0$, si l'inégalité

$$i>\ln(\varepsilon:[g(x,t)\,\|V_0(x,t)-\beta[v_0]\|):\ln k,\ \forall\,(x,t)\in D\quad x\bar{D}_5 \tag{21}$$

est satisfaite.

4. En ce que regarde le problème de la stabilité des solutions concernant le système considéré (5)–(8) par rapport à certaines perturbations des fonctions données qui y figurent, bornons nous ici au cas où les fonctions $s(x)$ et $r(t)$ deviennent, respectivement, $s_1(x)$ et $r_1(t)$, $\forall\,x\in[a,b]$, $\forall\,t\in[\underline{\alpha},\underline{\gamma}]$. Dans ce cas, le système (5)–(8) se transforme comme suit, la nouvelle fonction inconnue y étant $z(x,t)$:

$$M_2^{(3)}[z(x,t)]=f[x,t,z(x,t),M_2^{(1)}[z(x,t)],M_2^{(2)}[z(x,t)],\int_a^{s_1(x)}K(x,t,\underline{\xi},z(x,t)$$

$$z'_t(\underline{\xi},t),z''_{tt}(\underline{\xi}t))\,d\underline{\xi},\int_{\underline{\alpha}}^{r_1(t)}N(x,t,\underline{\tau},z(x,\underline{\tau}),z'_x(x,\underline{\tau}),z''_{xx}(x,\underline{\tau}))\,d\underline{\tau}]\equiv\mathcal{L}_1[z], \tag{22}$$

$$z_t^{(i)}(x,\underline{\alpha})=\underline{\varphi_i}(x)\ ;\quad (23)\quad z_x^{(i)}(a,t)=\underline{\psi_i}(t)\ ;\quad \underline{\varphi_i}^{(i)}(a)=\underline{\psi_i}^{(i)}(\underline{\alpha})=q_i=\text{const},\ i=0,1,2 \tag{24}$$

En procédant maintenant avec le système non linéaire aux opérateurs héréditaires et polyvibrants d'ordre supérieur (22)–(25) d'une manière analogue à ce que a été fait auparavant concernant le système intégrodifférential (5)–(8), on parvient au système d'équations intégrales

$$z(x,t)=A[w],$$

$$w(x,t)=\underline{\varphi_2}(x)+\underline{\psi_2}(t)-q_2+\int_a^x\int_{\underline{\alpha}}^t\mathcal{L}_1[z]\,d\underline{\theta}\,d\underline{\eta}=\underline{\sigma}(x,t)+\int_a^x\int_{\underline{\alpha}}^t f\quad \eta,\theta \tag{26}$$

$$A[w],\ M_2^{(1)}(A[w]),\ w(\underline{\eta},\underline{\theta}),\int_a^{s_1(\underline{\eta})}K(\underline{\eta},\underline{\theta},\underline{\xi},A[w],A'_{\underline{\theta}}[w],A''_{\underline{\theta}\underline{\theta}}[w]\,d\underline{\xi}$$

$$\int_{\underline{\alpha}}^{r_1(\underline{\theta})}N(\underline{\eta},\underline{\theta},\underline{\tau},A[w],A'_{\underline{\eta}}[w],A''_{\underline{\eta}\underline{\eta}}[w])\,d\underline{\tau}]\,d\underline{\theta}d\underline{\eta}\equiv B_1[w]. \tag{27}$$

Dans l'hypothèse que les opérateurs A et B_1 appliquent les domaines de leur définition en soi et si l'inégalité

$$k_1 = \| B_1 \| < 1 \tag{28}$$

a lieu, on en déduit le suivant.

Theoreme 2. *Le problème* (22)–(25) *possède, dans les conditions ci-dessus, une solution et une seule* $z = z(x, t) \in C^{3,3}(D)$ *vers laquelle converge la succession* $\{z_i(x, t)\}_0^\infty$ *où l'on a*

$$z_i(x, t) = A[w_i] \quad (29); \qquad w_{i+1}(x, t) = B_1[w_i], \quad i = 0, 1, \ldots \quad (30)$$

$$| z(x, t) - z_i(x, t) | \leqslant g(x, t)\, k_1^i \| w_0(x, t) - B_1[w_0] \| : (1 - k_1) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0,$$

$$\forall\ (x, t) \in D,\ w_0(x, t) \in C(D) \subset D_1. \tag{31}$$

Proposons nous d'évaluer l'ordre de voisinage des solutions des systèmes (5)–(8) et (22)–(25) dans l'hypothèse que ces systèmes ne possèdent que des solutions uniques dans la classe de fonctions $C^{3,3}(D)$. On en déduit de (15) et (27)

$$\| v(x, t) - w(x, t) \| = \| B[v] - B_1[w] \| \leqslant \| \int_a^x \int_{\underline{\alpha}}^t \Big\{ L_{1f}(\underline{\eta}, \underline{\theta}) \, | A[v - w] | + L_{2f}(\underline{\eta}, \underline{\theta} |$$

$$| M_2^{(1)}(A[v - w]) | + L_{3f}(\underline{\eta}, \underline{\theta}) \, | v(\underline{\eta}, \underline{\theta}) - w(\underline{\eta}, \underline{\theta}) | + L_{4f}(\underline{\eta}, \underline{\theta}) \left[\int_a^{s_i(\underline{\eta})} \sum_0^2 \right.$$

$$L_{i+1k}(\underline{\eta}, \underline{\theta}, \underline{\xi}) \cdot | A_{\underline{\theta}}^{(i)}[v - w] | \, d\underline{\xi} + | \int_{s_i(\underline{\eta})}^{s(\underline{\eta})} K(\underline{\eta}, \underline{\theta}, \underline{\xi}, A[v], A'_{\underline{\theta}}[v], A''_{\underline{\theta}\underline{\theta}}[v]) \, d\underline{\xi} \Big] +$$

$$+ L_{5f} | \underline{\eta}, \underline{\theta} | \cdot \Big[\int_{\underline{\alpha}}^{r_1(\underline{\theta})} \sum_0^2 L_{i+1\,N}(\underline{\eta}, \underline{\theta}, \underline{\tau}) \, | A_{\underline{\eta}}^{(i)}[v - w] | \, d\underline{\tau} + | \int_{r_i(\underline{\theta})}^{r(\underline{\theta})} N(\underline{\eta}, \underline{\theta}, \underline{\tau}, A[v],$$

$$A'_{\underline{\eta}}[v], \ A''_{\underline{\eta}\underline{\eta}}[v]) \cdot d\underline{\tau} | \Big] \Big\} d\theta d\eta \| \leqslant Q_1 + Q_2 \| v(x, t) - w(x, t) \|,$$

ou $Q_i = \text{const}$, $i = 1, 2$.

Si l'on suppose la valabilité de l'inégalité

$$Q_3 = 1 - Q_2 > 0,$$

on en déduit

$$\| v(x, t) - w(x, t) \| \leqslant Q_1 : Q_3 \tag{32}$$

et par suite l'évaluation finale

$$| u(x, t) - z(x, t) | \leqslant g(x, t)\, Q_1 : Q_3, \quad \forall\ (x, t) \in D. \tag{33}$$

5. Proposons nous maintenant, dans l'hypothèse que le système (5)–(8) possède une solution unique $u = u(x, t) \in C^{3,3}(D)$, de construire ses solutions approchées en utilisant un autre procédé différent des procédés utilisés auparavant par les auteurs des études des systèmes différentiels aux structures complexes, à savoir les professeurs L. E. Krisvoshein et D. Mangeron, suivis parfois par quelquesuns de leur collaborateurs ou discipl les, [13], [14]. Posons dans ce but

$$u_i(x, t) = A[v_i], \tag{34}$$

$$v_{i+1}(x, t) = \beta[pB[v_i] + q\beta[v_i + R_i]]. \tag{35}$$

où l'on a mis

$$p=p(x,t)\in C(D),\quad q=q(x,t)\in C(D),\quad p+q\equiv 1,\quad \forall (x,t)\in D,$$

$$R_i\equiv R(v_i-B[v_i]),\quad R(0)=0.$$

Passons à examiner les conditions de convergence de la succesion $\{u_i(x,t)\}_0^\infty$ vers la solution $u(x,t)$, $\forall (x,t)\in D$. Etablissons dans ce but les conditions de convergence de la succesion $\{v_i(x,t)\}_0^\infty$ vers la fonction $v(x,t)$. On aboutit aux inégalités

$$k^2\{\|p\|+\|q\|[1+\|R\|(1+k)]\}\,|\,v_i\,|\,x,t\,|-v_{i-1}(x,t)\|\equiv$$

$$\|v_{i+1}(x,t)-v_i(x,t)\|\beta[p\beta[v_i]+q\beta[v_i+R_i]]-\beta[p\beta[v_{i-1}]+$$

$$q\beta[v_{i-1}+R_{i-1}]]\|\leqslant k_2\|v_i(x,t)-v_{i-1}(x,t)\|\leqslant\ldots\leqslant k_2^i\|v_1(x,t)-$$

$$-v_0(x_1t)\|\underset{i\to\infty}{\overset{k_2>1}{\longrightarrow}}0 \tag{36}$$

et

$$\|v(x,t)-v_i(x,t)\|=\|\beta[p\beta[v]+q\beta[v+R^\circ]]-\beta[p\beta[v_{i-1}]+$$

$$q\beta[v_{i-1}+R_{i-1}]]\|\leqslant k^2\{\|p\|+\|q\|[1+\|R\|(1+k)]\}\|v(x,t)-v_{i-1}(x,t)$$

$$\equiv k_2\|v(x,t)-v_{i-1}(x,t)\|\leqslant\ldots\leqslant k_2^i\|v(x,t)-v_0(x,t\|\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{37}$$

où l'on a mis

$$R^\circ\equiv R[v-B[v]]=R(0)=0.$$

D'où on en déduit l'inégalité finale

$$|u(x,t)-u_i(x,t)|\leqslant g(x,t)\,k_2^i\|v(x,t)-v_0(x,t)\|\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}0,\quad\forall (x,t)\in D. \tag{38}$$

Remarques. 1°. Il serait intéressant de comparer l'efficacité des procédés d'approximation utilisés ci-dessus.

2°. Quel serait l'avantage si l'on considère le cas où les fonctions données satisfont aux conditions de Hölder ou bien, ce que est le même, aux conditions de Lipschitz d'ordre p ?

3°. Quel serait l'avantage de faire choisir d'autres principes du point fixe au lieu du principe de Banach ?

4°. Il serait intéressant de prendre en considération des systèmes dans un certain sens similaires ayant pour l'opérateur polyvibrant d'ordre supérieur $M_2^{(4)}$. Est-ce que la parité de celui-ci joue quelque rôle dans tous les problèmes „bien posés" ou bien seulement dans le cas de problèmes des spectres ?

5°. Est-ce que la parité ou bien l'imparité du nombre de variables indépendantes joue quelque rôle dans ces sortes de problèmes ? ...

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Mangeron, Sopra un problema al contorno per un 'equazione non lineare alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie. Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., (6), XVI, 2° sem., fasc. 7—8, 1932, 305—310 ; Problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple. Rend.

sci. fis., mat., Napoli, (4), II, 1932, 29—40 ; Nuovi problemi al contorno, Giorn. Mat., LXXI (1933), 1—51.
2. L. E. Krivoshein, K. V. Leung, T. Musuraliev et M. N. Oguztoreli, Problèmes à la frontière aux autocontrôles concernant une classe d'équations intégro-différentielles aux opérateurs hyperboliques. Dédié au Professeur D. MANGERON au seuil d'un demi-siècle de son activité scientifique. Bul. Univ. Galaţi, Anul I, fasc. II (Mat., Fiz., Mec.), 1978, 7—13.
3. D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, a) Mathematical systems of mixed structure. On the solutions of integro-differential functional equations. Sovet. Math. Doklady (U.S.A.), vol. 12 (1971), pp. 118—120 ; b) Boundary value and optimal control concerned with various types of polyvibrating equations. Dans le Vol. : „Advances in diff. and integral equations" SIAM, Philadelphia, Pa., 1969.
4. L. E. Krivoshein, A. Kutanov, D. Mangeron, U. D'Ambrosio, Su una classe die equazioni integro-differenziali aventi per limiti d'integrazione autocontrolli temporali e locali. Revista de la Real Academia Cienc. Exactas, Fis, y Naturales, de Madrid, LXXIII, 4, 1979, 521—529.
5. D. D. Bainov, L. E. Krivoshein, K. V. Leung, M. N. Oguztoreli, On a class of Nonlinear Mangeron's Polywave or Polyvibrating Integro-differential systems with Control. Bull. Polytechn. Inst. Jassy, N. S., XXV (XXIX), 1—2, 1979, 9—14. Dedicated to Prof. Mangeron on his Jubilee Year.
6. K. V. Leung, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, R. B. Stein, New mathematical models of physical phenomena. On the numerical solution of a nonlinear functional-differential system which occurs in the study of electrical activities in some neural nets. Bul. ştiinţ. şi tehn. Inst. Politehnic „Traian Vuia", Timişoara, 23 (37), 1, 1978, 8—12.
7. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett., 19, 1967, 1095—97.
8. T. H. R. Skyrme, A nonlinear theory of strong interactions. Proc. Roy. Soc., A 247, 1958, 260—278.
9. F. Calogero, Editor, Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform. Pitman, Lonfon. San Francisco. Melbourne, Research Notes in Mathematics 26, 1978, XVII+257 p.
10. D. Mangeron, Integral equations methods in Nonlinear Mechanics. Proc. IUTAM Conf. on Nonlinear Mechanics of Vibrations. Yu. A. Mitrololski, Editor. Ukrain. Akad. of Sci. Mathematics Institute, Kiev, 1961.
11. U. D.'Ambrosio, L. E. Krivoshein, D. Mangeron, M. Shimbo, Méthode unitaire d'étude des différentes classes de problémes „bien posés" concernant certains systèmes intégrodifférentiels non linéaires aux opérateurs polyvibrants et aux autocontrôles dans le limites d'intégration. Bul. Univ. Galaţi, II, fasc. II, 1979, 7—16.
12. a) G. D. Birkhoff, W. Gordon, On the draft's man and related equations. J,, Approx. Theory, 1, 199—208, b) 1968 ; K. V. Leung, M. N. Oguztoreli. Numerical solutions for polyvibrating equations of Mangeron, Rend. Accad. Naz. dei XL, (4), XXIV—XXV, 3—8, 1974 ; c) Dzhunuzbekova S., Krisvoshein L. E., K. V. Leung., M. N. Oguztoreli, Problèmes concernant différentes classes d'équations intégrodifférentielles non linéaires de Mangeron. Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci ; fis. mat. e nat., Rend., (8) 56, 151—156, 1974 ; d) L. E. Krivoshein, A. Kutanov, K. V. Leung, M. N. Oguztoreli, Contributions à l'étude des équations polyvibrantes de Mangeron. Bull. Soc. Math. de Belgique, XXVII, 57—65, 1975.
13. D. Mangeron, L. E. Krivoshein, Problemi concernenti sistemi di equazioni integro-differenziali von derivate totali di Picone. Rend. Sem. Mat. Università Padova, 33, 226—266, 1963 ; 34, 344—368, 1964 ; 35, 341—364, 1965.
14. P. Benvenuti, L. E. Krivoshein, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, F. D. Rossi, Sistemi differenziali con struttura composita. Nuovo problema dei valori integro-differenziali non lineari al contorno concernente una classe di equazioni integro-differenziali non lineari alle derivate parziali. Rend. Accad Naz. dei XL, (4), XXIV—XXV—93° dall'annao di fondazione (1782), 1—14, 1974. Levoro dedicato a MAURO PICONE, geniale creatore e promotore della. ricerca polivalente, nella soglia del Suo 90° compleanno.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom. 27 (41) Fascicola 1

THERMIC PHENOMENA IN THERMALLY ISOLATED PARIETAL JETS

BY

ŞTEFAN I. MAKSAY

Primită la redacţie la 31 III 1981.

1. Introduction.

For the study of movement in real jets theoretical models of jets are taken into consideration. Such a model is the jet of incompressible viscous fluid springing from a punctual source and spreading constantly along a wall in a motionless semilimited medium having the same nature as the fluid in the jet. The study of this type of movement was initiated by M. Glauert [1] and continued, among others, by N. I. Akatnov [2] who for the repartition of the longitudinal component part of velocity in jet determines the expression

$$u(x, \eta) = \sqrt{\frac{E_0}{\nu x}}\, \varphi(\eta), \tag{1}$$

where

$$\eta = (E_0 \nu x)^{-1/4}\, \psi, \tag{2}$$

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{6}\, \eta_\infty^2 \left(\sqrt{\frac{\eta}{\eta_\infty}} - \frac{\eta_i^2}{\eta_\infty^2} \right), \tag{3}$$

Notations.

x, y – coordinates of the boundary layer ; x is measured from the top of the plate in direction of the jet movement and y is measured on the normal to the plate,
u, v – projections of the velocity of the fluid particle on the axis of the x and y coordinates,
μ, ν, ρ – dinamic and kinematic viscosity quotients, density, ($\nu = \mu/\rho$),
T, c, i – absolute temperature in fluid, specific heat, enthalpy of the mass unity of fluid ($i = cT$),
λ – thermic conductibility quotient,
σ – Prandtl's number ($\sigma = \mu c/\lambda$),

and

$$\eta_\infty = \sqrt[4]{40} \approx 2{,}515. \tag{4}$$

The present paper is concerned with the thermic phenomena conected with the propagation of a jet of incompressible viscous fluid along a thermally isolated plane plate.

2. Thermic considerations.

To the equations of the thermic boundary layer in Mises'variables [3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial}{\partial \psi}\left(u \frac{\partial u}{\partial \psi}\right), \tag{5}$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial i}{\partial x} = u\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \psi}\left(u \frac{\partial i}{\partial \psi}\right) \tag{6}$$

the limit conditions are attached

$$u(x, 0)=0,\ u(x, \psi_\infty)=0,\ (\psi_\infty \neq \infty), \tag{7}$$

$$\frac{\partial i}{\partial \psi}(x, 0)=0,\ i(x, \psi_\infty)=i_{,\infty} \tag{8}$$

and the integral conditions

$$\int_0^{\psi_\infty} u\,\psi d\psi = E_0, \tag{9}$$

$$\rho \int_0^{\psi_\infty} (i - i_\infty)\, d\psi = J_1 \tag{10}$$

The integral condition (10) obtained from the equation of energy (6), assuming that the movement is nondissipative, expresses the conservation of the difference of enthalpy along the jet. The self-modelled solution [4] of the thermic problem in case of the jet spreading over a thermally isolated plate is

$$i(x, t, \sigma) = \frac{J_1}{\rho A(\sigma) \eta_\infty (E_0 \nu x)^{1/4}} (1 - t^{3/2})^\sigma + i_\infty \tag{11}$$

where

$$A(\sigma) = \int_0^1 (1 - t^{3/2})^\sigma dt, \tag{12}$$

and

$$t = \eta / \eta_\infty. \tag{13}$$

The return to the variables in the physical plane is aschieved by means of the relation

$$y = \left(\frac{2}{\eta_\infty} \ln \frac{1+\sqrt{t}+t}{(1-\sqrt{t})^2} + \frac{12}{\sqrt{3}\eta_\infty} \operatorname{arctgt} \frac{\sqrt{3t}}{2+\sqrt{t}}\right) \sqrt[4]{\frac{\nu^3 x^3}{E_0}} \tag{14}$$

In figure 1 the distribution of temperature in the physical plane is represented in a normal section on a plate, for the different values of Prandtl's number. From relation (11) it is noticed that the $T - T_\infty$ difference maintains inside the jet a constant sign, that is that of the integration thermic constant. Taking into consideration the fact that the difference of temperature attains its extreme on the surface of the plate, for $J_1 < 0$ the condition $T > 0$ defines the validity field of the formula (11) that is

$$x > \frac{J_1^4}{40 T_\infty^4 \rho^4 c^4 E_0 \nu A^4(\sigma)} \tag{15}$$

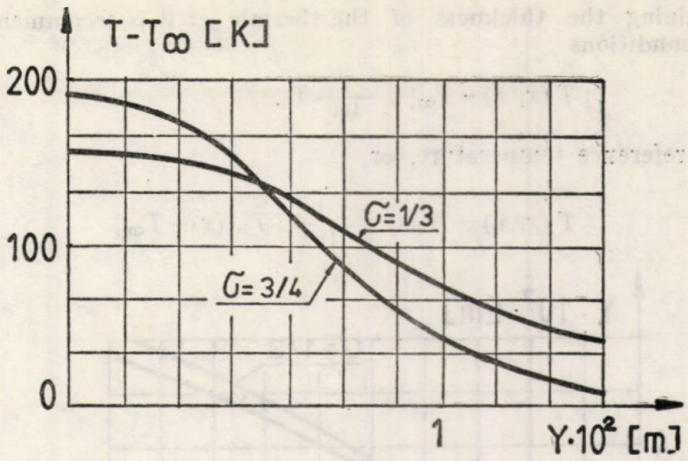


Fig. 1. The distribution of temperature in a normal section on a plate.

The temperature T of the plate is obtained from (11) for $\eta=0$ having the shape

$$T_W(x,\ \sigma)=\frac{J_1}{\rho c\eta_\infty (E_0 \nu x)^{1/4} A(\sigma)}+T_\infty \tag{16}$$

formula that estimates the adiabatic heating of the plate. It is noticed that temperature rises at the same time with the increase of Prandtl's number.

The difference between the temperature od the plate and the temperature of the undisturbed fluid is maximum in proximity of the jet source, decreasing while being removed from the source. It can be assumed that actually the thermic jet exerts its influence up to the distance x_0, solution of the equation

$$|T_W-T_\infty|=\frac{1}{100}T_0, \tag{17}$$

that is

$$x_0=\frac{10^7}{4}\frac{J_1^4}{\rho^4 c^4 E_0 \nu A^4(\sigma)\ T_0^4}, \tag{18}$$

T_0 being a reference temperature.

Through a surface placed on $\eta=$const. the heat change is achieved by conductiblity, the local thermic flux being

$$q(x,t;\ \sigma)=\frac{J_1 t}{4A(\sigma)x}(1-t^{3/2})\sigma \tag{19}$$

The thermic flux in a normal section to the plate is extreme in the point

$$\eta_0=\left(\frac{2}{2+3\sigma}\right)^{2/3}\eta_\infty, \tag{20}$$

the corresponding curves in the physical plane being obtained by means of relation (14).

For determining the thickness of the thermic jet it is recommendet to use one of the conditions

$$\text{a)} \qquad |T(x,\eta)-T_\infty| \leqslant \frac{1}{100}T_0, \tag{21}$$

T_0 being a reference temperature, or

$$\text{b)} \qquad |T(x,\eta)-T_\infty| \leqslant \frac{1}{100}|T_W(x)-T_\infty| \tag{22}$$

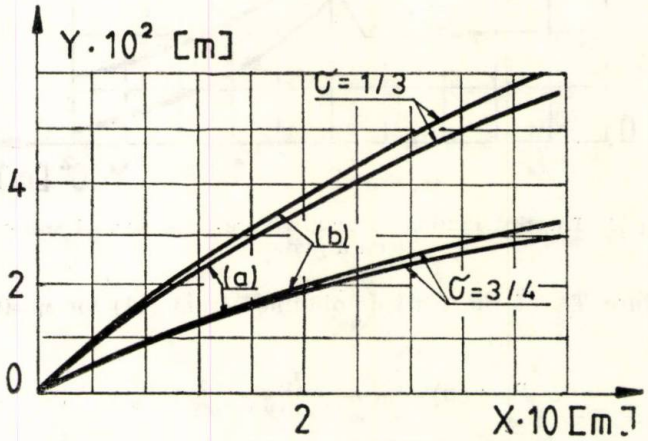


Fig. 2. The profile of the thermic boundary layer.

relations that lead, respectively, to

$$t=\left\{1-\left[\frac{\eta_\infty \rho c T_0 A(\sigma)\cdot(E_0 \nu x)^{1/4}}{100\,|J_1|}\right]^{1/\sigma}\right\}^{2/3} \tag{23}$$

$$t=\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^{1/\sigma}\right]^{2/3}. \tag{24}$$

In figure 2 the profile of the thermic boundary layer is represented for different values of Prandtl's number according to conditions a and b given respectively by relations 21 and 22.

FENOMENELE TERMICE ÎN JETURI PARIETALE IZOLATE TERMIC

REZUMAT

Se studiază fenomenele termice din jeturile de fluid vîscos incompresibil care se răspîndesc de-a lungul unei plăci plane izolate termic într-un mediu fluid de aceeaşi natură ca fluidul din jet stabilindu-se distribuţia temperaturii, a fluxului termic şi profilul jetului.

BIBLIOGRAFIE

1. Glauert M. B., Journal of Fluid Mechanics, Vol. I, Pt. 6, 1956, pp. 625–642.
2. Akatnov N. I., Priclad. Mat. i Mehanica, 1, 1960, 154.
3. Iacob C., Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Ed. Acad. Bucureşti şi Gauthier-Villars, Paris, 1959.
4. Brădeanu P., Maksay S., Studia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, ser. Math.-Mech., f. 2, 1972, p. 79–86.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 27 (41) **Fascicola 1**

ASUPRA ALGEBRELOR SCHRÖDER-MOISIL

DE

EUGEN BURLACU şi PAVEL NASLĂU

Primită la refacţie la 31 III 1981.

1. Se numeşte algebră Schröder-Moisil (în [1] e numită algebră Schröder. O vom numi-o pe scurt SM.-algebră) o algebră booleeană S cu operaţiile „$\cup$" şi „$\cap$" în care este definită o a treia operaţie „$\mid$" cu proprietăţile

$a \mid (b \mid c)=(a \mid b) \mid c$;

$(a \cup b) \mid c=(a \mid c) \cup (b \mid c)$, $a \mid (b \cup c)=(a \mid b) \cup (a \mid c)$;

$\exists\, u \in S,\ a \mid u=u \mid a=a$; $\quad 0 \mid a=a \mid 0=0$; $\quad \forall\, a, b, c \in S$.

Dacă S este finită atunci ea este un produs cartezian de algebre booleene $L_2=\{0, 1\}$ şi deci orice $a \in S$ poate fi scris sub forma:

$$a=(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in L_2,\ i=\overline{1, n}$$

şi dacă

$$e_i=(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{in}),\ i=\overline{1, n} \text{ atunci } a=\bigcup_{i=1}^{n} a_i e_i \tag{1}$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker, iar produsul $a_i b$ cu $a_i \in L_2$, $b \in S$ fiind definit astfel: $0b=0$, $1b=b$.

Reprezentarea (1) a lui a în „baza" $B=\{e_i \mid i=\overline{1, n}\}$ a algebrei S de „dimensiune" n este unică.

Deoarece $e_i \mid e_j \in S$, rezultă

$$e_i \mid e_j=\bigcup_{r=1}^{n} \gamma_{ijr} e_r \tag{2}$$

Elementele $\gamma_{ijr} \in L_2$ se numesc constantele de structură ale algebrei S. Pentru fiecare $i=1, n$ ele formează o matrice pătrată $A_i=\{\gamma_{ijr}\}$.

Un exemplu de S-M. algebră este mulţimea $\mathcal{A}_n$ a matricilor pătrate de ordinul n cu elemente din L_2 prin raport cu operaţiile booleene obişnuite: reuniunea, intersecţia şi înmulţirea matriceală.

Fie S o S-M. algebră de dimensiune n şi $f: S \to \mathcal{A}_n$ aplicaţia care asociază fiecărui element $a \in S$ cu descompunerea (1) matricea:

$$f(a)=\bigcup_{i=1}^{n} a_i M_i,\ M_i=A_i^T=\{\gamma_{tij}\},\ i, j, r=\overline{1, n} \tag{3}$$

În [1] se demonstrează că matricile M_i satisfac aceeaşi lege de înmulţire (2) ca şi elementele e_i:

$$M_i M_j=\bigcup_{r=1}^{n} \gamma_{ijr} M_r,\ i, j=\overline{1, n} \tag{4}$$

și că f este o injecție, iar în [2] se arată că deși f comută cu operațiile „$\cup$" și „$|$" nu comută în general cu „$\cap$", deci f nu este morfism de S-M. abgebre și se dă o condiție necesară și suficientă pentru ca f să fie un morfism de S-M. algebre.

2. În cele ce urmează vom studia interdependența dintre distributivitatea operației „$|$" față de „$\cap$" și condiția ca f să fie un morfism de S-M. algebre.

Teorema 1. Aplicația f este un morfism de S-M. algebre dacă și numai dacă operația „$|$" este distributivă la dreapta față de „$\cap$" în B:

$$(e_i \cap e_j) \mid e_k = (e_i \mid e_k) \cap (e_j \mid e_k),\ \forall i, j, k = \overline{1, n} \tag{5}$$

Demonstrație: Fie $u = \bigcup_{s=1}^{n} u_s e_s$. Din $e_i \mid u = e_i$ rezultă: $\bigcup_{r=1}^{n} u_r \gamma_{irj} = \delta_{ij}$, de unde rezultă: $M_i \neq 0$.

Dacă f este un morfism de S-M. algebre atunci pentru $i \neq j$ rezultă:

$f(e_i) \cap f(e_j) = 0 \Leftrightarrow M_i \cap M_j = 0 \Leftrightarrow \gamma_{ikr}\gamma_{jkr} = 0,\ f((e_i \mid e_k) \cap (e_j \mid e_k)) = M_i M_k \cap$

$\cap\ M_j M_k = \left(\bigcup_{r=1}^{n} \gamma_{ikr} M_r\right) \cap \left(\bigcup_{s=1}^{n} \gamma_{jks} M_s\right) = \bigcup_{r=1}^{n} \gamma_{ikr}\gamma_{jkr} M_r = 0$, de unde rezultă:

$$(e_i \mid e_k) \cap (e_j \mid e_k) = 0 = (e_i \cap e_j) \mid e_k \text{ pentru } i \neq j$$

Dacă $i = j$, evident, $(e_i \cap e_j) \mid e_k = e_i \mid e_k = (e_i \mid e_k) \cap (e_i \mid e_k)$

Reciproc, dacă $(e_i \mid e_k) \cap (e_j \mid e_k) = (e_i \cap e_j) \mid e_k = 0$ pentru $i \neq j$, rezultă:

$$\left(\bigcup_{r=1}^{n} \gamma_{ikr} e_r\right) \cap \left(\bigcup_{s=1}^{n} \gamma_{jks} e_s\right) = \bigcup_{r=1}^{n} \gamma_{ikr}\gamma_{jkr} e_r = 0,$$

de unde:

$$\gamma_{ikr}\gamma_{jkr} = 0,\ M_i \cap M_j = 0,\ f(a) \cap f(b) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i e_i\right) \cap f\left(\bigcup_{j=1}^{n} b_j e_j\right) =$$

$$= \left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i M_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} b_j M_j\right) = \bigcup_{i=1}^{n} a_i b_i M_i = \bigcup_{i=1}^{n} a_i b_i f(e_i) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i b_i e_i\right) =$$

$$= f\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i e_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} b_j e_j\right)\right) = f(a \cap b)$$

Vom numi $\cap$-distributivă o S-M. algebrciă în care

$$(a \cap b) \mid c = (a \mid c) \cap (b \mid c) \text{ și } a \mid (b \cap c) = (a \mid b) \cap (a \mid c),\ \forall a, b, c \in S \tag{6}$$

Teorema 2. O S-M. algebră este $\cap$-distributivă dacă și numai dacă f este morfism de S-M. algebra și

$$(e_i \mid e_j) \cap (e_i \mid e_k) = 0 \text{ pentru } j \neq k \tag{7}$$

Demonstrație. Se verifică prin calcul că condiția (6) este echivalentă cu (5) și (7) și se ține seama de Teorema 1.

Observația 1. Condiția (7) este echivalentă cu condiția ca matricile A_i, $i = \overline{1, n}$ să aibă cel mult un element diferit de zero în fiecare coloană.

3. Vom considera în continuare S-M. algebre fără divizori ai luizero prin raport cu operația „$|$".

Lema 1. O S-M. algebră este fără divizori ai lui zero dacă şi numai dacă :

$$e_i \mid e_j \neq 0 \quad i, j = \overline{1, n} \tag{8}$$

Într-adevăr, dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, fie i şi j astfel încît $a_i = b_j = 1$. Dacă este îndeplinită condiţia (8) atunci rezultă că există r- astfel încît $e_i \mid e_j \geqslant e_r$ de unde $a \mid b \geqslant e_i \mid e_i \mid \geqslant e_r > 0$.

Lema 2. Aplicaţia f este un morfism de S-M. algebre dacă şi numai dacă operaţia „$\mid$" este stabilă în B şi

$$e_i \mid e_k \neq e_j \mid e_k \text{ pentru } i \neq j \tag{9}$$

Într-adevăr, din (8) şi (5) rezultă că în fiecare linie a lui A_i, $i = \overline{1, n}$ există un element diferit de zero şi numai unul, deci operaţia „$\mid$" este stabilă în B, adică : pentru orice $i, j = \overline{1, n}$ există r astfel încît $e_i \mid e_j = e_{ji} = e_r$.

Dacă „$\mid$" este stabilă în B atunci condiţiile (5) şi (9) sînt echivalente.

Observaţia 2. Aplicatia f este un morfism de S-M. algebre dacă şi numai dacă operaţia „$\mid$" este stabilă în B şi

$$1 \mid e_k = 1, \quad k = \overline{1, n} \tag{10}$$

unde 1 este elementul maximal din S.

Într-adevăr, $1 \mid e_k = \left(\bigcup_{i=1}^{n} e_i \right) e_k = \bigcup_{i=1}^{n} (e_i \mid e_k) = \bigcap_{i=1}^{n} e_{ki}$ dacă „$\mid$" este stabilă în B. Se observă că în acest caz condiţiile (9) şi (10) sînt echivalente.

Observaţia 3. Din Teorema 2, Observaţia 1 şi demonstraţia Lemei 2 rezultă : O S-M. algebră fără divizori ai lui zero este $\cap$-distributivă dacă şi numai dacă matricile A_i, $i = \overline{1, n}$ sînt ortogonale şi dizjuncte.

De asemenea din cele de mai sus rezultă următoarele :

Teorema 3. O S-M. algebră fără divizori ai lui zero este $\cap$-distributivă dacă şi numai dacă f este un morfism de S-M. algebră şi : $e_i \mid 1 = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Teorema 4. O. S-M. algebră de dimensiune n, fără divizori ai lui zero, $\cap$-distributivă este izomorfă cu o algebră de matrici formată din matricea nulă şi matrici supraortogonale, elementelor $e_i \in B$ corespunzîndu-le matrici ortogonale dizjuncte. Printre acestea se află şi matricea unitate $U = M_r$ dacă şi numai dacă $u = e_r$.

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, Asupra algebrei relaţiilor binare. Comunicările Academiei R.P.R., 1958, VIII, 12, pp. 1 251—1 254.
2. E. Burlacu, About a Result of Moisil, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., tom XXI, nr. 9/1976, pp. 1189—1192.

ABOUT SCHRÖDER-MOSIL ALGEBRAS

(ABSTRACT)

In this paper, it will be attempt to praise the interdependence between distributive property of the third operation of some Schröder-Moisil algebras S in regard to intersection and homomorfism property of a function $f : S \to A_n$, A_n-matrix algebras of order n.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom. 27 (41) Fascicola 1

GENERALIZAREA TEOREMEI ÎNMULŢIRII IMAGINILOR ŞI A TEOREMEI ÎNMULŢIRII ORIGINALELOR ÎN TRANSFORMAREA LAPLACE DISCRETĂ

DE

N. NEAMŢU şi N. ZOPOTA

Primită la redacţie la 10 IV 1981.

În transformarea Laplace discretă, având şirurile complexe $x=\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$; $y=\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ pentru care $|x_n|<M_1e^{s_1n}$; $|y_n|<M_2e^{s_2n}$ (şiruri original) dacă $\mathcal{L}\{x_n\}=X(p)=\sum_{n=0}^{\infty}x_ne^{-np}\,Y(p)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_ne^{-np}=\mathcal{L}\{Y_n\}$, $p=s+i\sigma$, reprezintă respectiv transformatele Laplace discrete ale şirurilor x şi y, au loc următoarele teoreme [2]:

Teorema 1.
Produsul $X(p)\,Y(p)$ este tot o imagine Laplace discretă şi

$$X(p)\,Y(p)=\mathcal{L}\left\{\sum_{m=0}^{n}x_mY_{n-m}\right\} \tag{1}$$

suma:

$$\sum_{m=0}^{n}x_my_{n-m}=(x*y)_n \tag{2}$$

reprezintă termenul de rangul n al şirului original numit produs de convoluţie al şirurilor $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ şi $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Demonstraţia teoremei se bazează pe intervertirea ordinii de sumare într-o serie dublă şi pe teorema întîrzierii din transformarea Laplace discretă.

Teorema 2.
Imaginea şirului cu termenul de rang n, $x_n\cdot y_n$ este o funcţie olomorfă $\Phi(p)$ în semiplanul $s>s_1+s_2$ şi are loc relaţia:

$$\mathcal{L}\{x_ny_n\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\pi}^{S+i\pi}X(q)\,Y(p-q)\,dq \tag{3}$$

Demonstraţia teoremei 2 se bazează pe formulele transformării inverse

$$x_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\pi}^{s+i\pi}X(q)\,e^{nq}\,dq,\quad n\in\mathbf{N} \tag{4}$$

pe teorema deplasării şi intervertirea ordinii de integrare într-o integrare dublă.

În continuare ne propunem să generalizăm aceste teoreme.

Teorema 3.

Dacă $L\{f(n)\}=F(p)$ și sînt date funcțiile analitice $\Phi(p)$ și $q(p)$ astfel încît :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n, \nu)\, e^{-pn} = e^{-q(p)\nu}\, \Phi(p) \tag{5}$$

atunci avem :

$$\Phi(p)\, F(q(p)) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} [f(\nu)\, \varphi(n, \nu)] \right\} \tag{6}$$

sau în scriere operațională

$$\Phi(p)\, F(q(p)) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)\, \varphi(n, \nu) \right\} \tag{7}$$

Demonstrație : Considerăm seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)\, \varphi(\eta, \nu) \right]$$

în care se poate interverti ordinea de însumare și obținem

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n, \nu)\, e^{-pn} \right] \tag{8}$$

În (8) ținem seama de (5) și obținem :

$$\Phi(p) \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)\, e^{-q(p)} \right] = \Phi(p)\, F(q(p)) \tag{9}$$

Teorema 4.

Dacă $F_1(p)=L\{f_1(n)\}$; $F_2(p)=L\{f_2(n)\, e^{wq(n)}\}$ atunci

$$\Phi(p)=L\{f(n)\} \tag{10}$$

unde

$$f(n)=f_2(n)\, f_1[q(n)]$$

și

$$\Phi(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\pi}^{S+\pi i} F_1(w)\, F_2(w, p)\, dw \tag{12}$$

Demonstrație. Pe baza formulei (4)

$$f_1(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\pi}^{S+i\pi} F_1(p)\, e^{pn} dp \tag{13}$$

$$f_2(n)\, e^{wq(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{S-i\pi}^{S+i\pi} F_2(w, p)\, e^{pn}\, dp \tag{14}$$

Ținînd seama de (11), (13) și (14) după intervertirea ordinii de integrare se ajunge la (12).

Observații

1) Dacă în (7) luăm $q(p)=p$, $\varphi(n, \nu)=\varphi(n-\nu)$ și ținem seama ca $\varphi(n-\nu)=0$ pentru $n-\nu<0$ atunci obținem teorema 1.

2) Dacă în teorema 4, $q(n)=n$ obținem teorema 2.

Într-adevăr, punînd în (14) $q(n)=n$ obținem :

$$\mathcal{L}\{e^{wn} f_2(n)\}=F_2(w, p) \tag{15}$$

Notînd imaginea lui $\{f_2(n)\}$ prin $G(p)$

$$G(p)=\sum_{n=0}^{\infty} f_2(n)\, e^{-pn}\; G(p)=\mathcal{L}\{f_2(n)\}$$

Înlocuind pe p cu $p-w$ obținem :

$$G(p-w)=\sum_{n=0}^{\infty} f_2(n)\, e^{-(p-w)n}=\sum_{n=0}^{\infty}[f_2(n)\, e^{wn}]\, e^{-pn}$$

adică :

$$G(p-w)=L\{e^{sn} f_2(n)\} \tag{16}$$

Comparînd (15) cu (16) rezultă că : $F_2(w, p)=G(p-w)$ adică

$$\mathcal{L}\{f_1(n)\, f_2(n)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\pi}^{s+i\pi} F(w)-G(p-w)\, dw$$

SUMMARY

In this note is given a generalisation of the theorem about the product of two Laplace images of discrete functions and a generalisation of the theorem about the image of two original functions.

BIBLIOGRAFIE

1. Myskis D. A., Advanced mathematics in enigineers, MIR PUBLISHER MOSCOW, 1975.
2. Neamțu N., Transformata Laplace discretă. Lucrare comunicată la sesiunea cadrelor didactice din I. Politehnic Timișoara ; mai 1978.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 27 (41) **Fascicola 1**

COMBINĂRI GENERALIZATE

DE

A. DRAGOMIR, V. LAZIUN

Primită la redacţie la 14 IV 1981.

Combinările generalizate introduse în [1] au interesante aplicaţii în sume de tip q-binomial. Este cunoscut că, combinările generalizate date de relaţia

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \prod_{i=0}^{k-1} (q^{n-i}-1) \Big/ \prod_{i=0}^{k-1} (q^{i+1}-1)$$

reprezintă numărul subspaţiilor S_k de dimensiune k, ale unui spaţiu vectorial de dimensiune n peste un cîmp finit K cu q elemente.

În cele ce urmează vom da o serie de aplicaţii ale combinărilor generalizate privind consecinţe ale unor formule de tip q-binomial.

Vom stabili următoarele relaţii

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} \left\{ (p-i)^{q^n} + i \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (p-i)^{q^k} \right\} = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{s=1}^{m} (-1)^{m-s} \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r-1 \\ m-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(m-s)(m-s+1)} =$$

$$= 1 + (-1)^{m+1} \begin{bmatrix} m+r-1 \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}m(m+1)} \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{q^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{(q^i-1)\,!\,!} \begin{bmatrix} m+r+p-i \\ m \end{bmatrix}_q =$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \frac{(q^{m+p+1}-1)^i}{q^{ir-i(i-1)/2}} \begin{bmatrix} m+r-i+1 \\ m+1 \end{bmatrix}_q \tag{3}$$

Pentru a stabili (1), ne vom folosi de numerele lui Stirling de speţa a II-a generalizate :

$$ST(q, u, k, p) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} S(q^k, p)$$

unde $S(q\ ,\ p)$ reprezintă numerele lui Stirling de speţa a II-a.

Se verifică imediat că numerele lui Stirling de speţa a II-a generalizate verifică următoarele relaţii :

$$ST(q, n+1, k, p) = \frac{q^{n+1}-1}{q^{n-k+1}-1} ST(q, n, k, p) \qquad (ST_1)$$

$$ST(q, n, k, p-1)+p\, ST(q, n, k, p) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q S(q^k+1, p) \qquad (ST_2)$$

Dar $S(n, m)$ reprezintă numărul partiţiilor unei mulţimi de n elemente în m clase, deci

$$S(q^n, p) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} S(q^k, p-1)$$

întrucît există $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ spaţii vectoriale S_k ale lui V_n.

Totodată

$$S(q^k, p-1) = S(q^k+1, p) - pS(q^k, p) \qquad (1.1)$$

$$S(q^n, p) = \frac{1}{p!} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} (p-i)^{q^n} \qquad (1.2)$$

deci

$$S(q^n, p) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \{S(q^k+1, p) - pS(q^k, p)\} =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left\{ \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} (p-i)^{q^{k+1}} - \right.$$

$$\left. - p \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} (p-i)^{q^k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\substack{i=0,p \\ k=0,n-1}} (-1)^{i+1} i \binom{p}{i} (p-i)^{q^k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

Avînd în vedere (1.2) şi schimbînd ordinea de sumare în membrul drept rezultă (1).

Este cunoscută relaţia :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \begin{bmatrix} m+r \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q \cdot q^{\frac{1}{2} j(j-1)} =$$

$$= 1 + (-1)^{m-1} \begin{bmatrix} m+r-1 \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2} m(m+1)} \qquad (2.1)$$

pe care o scriem sub forma :

$$E = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \begin{bmatrix} m+r \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2} j(j-1)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2} j(j-1)} + \begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}_q$$

Se știe că (vezi [1])

$$\begin{bmatrix} m+r \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m+r \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} i \\ i-j \end{bmatrix}_q =$$

$$= \begin{bmatrix} m+r \\ i-j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-(i-j)+r \\ j \end{bmatrix}_q \tag{2.2}$$

$$\begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ m-j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m+r \\ m-j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j+r \\ j \end{bmatrix}_q$$

Prin substituire obținem :

$$E = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \begin{bmatrix} m+r \\ i-j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-(i-j)+r \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2} j(j-1)} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \begin{bmatrix} m+r \\ m-j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} j+r \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2} j(j-1)} + \begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q$$

Sumînd mai întîi după j și apoi după i și notînd în prima sumă $i-j=s$ iar în a doua $m-j=s$, obținem

$$E = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{i} (-1)^{i-s} \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r \\ i-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(i-s)(i-s-1)} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{m-s} \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r \\ m-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(m-s)(m-s-1)} +$$

$$+ \begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q (s \leqslant i)$$

care se poate scrie succesiv sub forma schimbării ordinii de sumare :

$$E = \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i-s} \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r \\ i-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(i-s)(i-s-1)} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{m-s} \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r \\ m-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(m-s)(m-s-1)} +$$

$$+ \begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q = \sum_{s=1}^{m-1} \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \left\{ \sum_{i=s}^{m-1} (-1)^{i-s} \begin{bmatrix} m-s+r \\ i-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(i-s)(i-s-1)} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m-s} \begin{bmatrix} m-s+r \\ m-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(i-s)(i-s-1)} \right\} + \begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q =$$

$$= \sum_{s=1}^{m-1} \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \sum_{i=s}^{m} (-1)^{i-s} \begin{bmatrix} m-s+r \\ i-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(i-s)(i-s-1)} + \begin{bmatrix} m+r \\ m \end{bmatrix}_q .$$

Se verifică imediat :

$$\sum_{i=s}^{m} (-1)^{i-s} \begin{bmatrix} m-s+r \\ i-s \end{bmatrix}_q = (-1)^{m-s} \begin{bmatrix} m-s+r \\ m-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(m-s)(m-s+1)}$$

și prin înlocuire obținem

$$E = \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{m-s} \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r-1 \\ m-s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(m-s)(m-s+1)}$$

ceea ce demonstrează (2).

Pentru (3) pornim de la relația :

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q q^{ps+\frac{1}{2}s(s-1)} =$$

$$= (-1)^m q^{r(m+p)+\frac{1}{2}m(m+2p-1)} + \tag{3.1}$$

$$+ (-1)^{m-1} q^{-\frac{1}{2}p(p-1)} \prod_{\alpha}^{n} (q^{m+\alpha}-1) \sum_{i=0}^{p-1} \frac{q^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{\prod_{k=0}^{i} (q^i-1)} \begin{bmatrix} m+r+p-i-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q$$

Înlocuind m cu $m+1$ și ținînd cont că

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q - q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

obținem

$$S = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m+r+1 \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q q^{ps+\frac{1}{2}s(s-1)} -$$

$$- q^r \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m+r+1 \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r \\ r \end{bmatrix}_q q^{ps+\frac{1}{2}s(s-1)} =$$

$$= S_1 - q^r S_2 \tag{3.2}$$

Notînd :

$$E_1(m, r, p) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m+r \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+r-1-s \\ r-1 \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}s(2p-1+s)}$$

$$E_2(m, r, p) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{q^{\frac{1}{2}i(r-1)}}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^i-1)} \begin{bmatrix} m+r-1+p-i \\ r-1 \end{bmatrix}_q$$

este cunoscută relația :

$$E_1(m, r, p) = (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m+2p-1)+r(m+p)} +$$

$$+ (-1)^{m-1} q^{-\frac{1}{2}p(p-1)} (q^{p+1}-1) \dots (q^{p+m}-1) E_2(m, r, p) \tag{3.1'}$$

Pentru a demonstra (3) plecăm de la $E_1(m+1, r, p)$ și aplicînd formula

$$\begin{bmatrix} m+r-s \\ r-1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m+r-s+1 \\ r \end{bmatrix}_q - q^r \begin{bmatrix} m+r-s \\ r \end{bmatrix}_q$$

obținem :

$$E_1(m+1, r, p) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m+r+1 \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+r-s+1 \\ r \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}s(2p-1+s)} - \quad (3.2')$$

$$- q^r \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m+r+1 \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+r-s \\ r \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}s(2p-1+s)} =$$

$$= S_1 - q^r S_2$$

Vom calcula pe S_1.

Întrucît :

$$\begin{bmatrix} m+r+1 \\ s \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m+r+1 \\ m-s+r+1 \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m-s+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q =$$

$$= \begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+1 \\ m-s+1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+1 \\ s \end{bmatrix}_q$$

vom avea

$$S_1 = \begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \begin{bmatrix} m+1 \\ s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}s(2p+s-1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q \left\{ \sum_{s=0}^{m+1} (-1)^s \begin{bmatrix} m+1 \\ s \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}s(2p+s-1)} + \right.$$

$$\left. + (-1)^m q^{\frac{1}{2}(m+1)(2p+m)} \right\} = (-1)^m \begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q q^{\frac{1}{2}(m+1)(2p+m)} +$$

$$+ (-1)^{m-1} \begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q \cdot \frac{(q^{m+p}-1)(q^{m+p-1}-1)\dots(q^{m+1}-1)}{(q^i-1)(q^{i-1}-1)\dots(q-1)}$$

Revenind în (3.2'), înlocuind pe S_1 obținem după efectuarea reducerilor

$$S_2 = (-1)^m q^{(r+1)(m+p)+\frac{1}{2}(m+2p-1)} +$$

$$+ (-1)^{m+1} q^{-r-\frac{1}{2}p(p-1)} (q-1)\dots(q^{m+p+1}\cdot A + \quad (3.3)$$

$$+ (-1)^{m+1} q^{-r} \begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q \frac{(q^{m+1}-1)\dots(q^{m+p}-1)}{(q-1)\dots(q^p-1)}$$

unde

$$A=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{q^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{(q-1)\dots(q^i-1)}\begin{bmatrix} m+r+p-i \\ r-1 \end{bmatrix}_q$$

Dar

$$S_2=E_1\ (m,\ r+1,\ p)$$

Înlocuind (3.3) şi efectuînd reducerile obţinem :

$$\sum_{i=0}^{p-1}\frac{q^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{(q-1)\dots(q^i-1)}\begin{bmatrix} m+r+p-i \\ r \end{bmatrix}_q=$$

$$=(q^{m+p+1}-1)\ q^{-r}\sum_{i=0}^{p-1}\frac{q^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{(q-1)\dots(q^i-1)}\begin{bmatrix} m+r+p-i \\ r \end{bmatrix}_q+$$

$$+\frac{q^{\frac{1}{2}p(p-1)-r}}{(q-1)\dots(q^{p-1}-1)}\begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q$$

Punînd

$$E_3\ (m,\ r,\ p)=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{q^{\frac{1}{2}i(i-1)}}{(q-1)\dots(q^i-1)}\begin{bmatrix} m+r+p-i \\ r \end{bmatrix}_q$$

obţinem :

$$E_3\ (m,\ o,\ p)=\frac{q^{\frac{1}{2}p(p-1)}}{(q-1)\dots(q^{p-1}-1)}$$

şi

$$E_3\ (m,\ r,\ p)=(q^{m+p+1}-1)q^{-r}\ E_3\ (m,\ r-1,\ p)+$$

$$+\frac{q^{\frac{1}{2}p(p-1)-r}}{(q-1)\dots(q^{p-1}-1)}\begin{bmatrix} m+r+1 \\ r \end{bmatrix}_q$$

deci, recursiv găsim

$$E_3\ (m,\ r,\ p)=\sum_{i=0}^{r}\frac{(q^{m+p+1}-1)^i}{q^{ir-\frac{1}{2}i(i-1)}}\begin{bmatrix} m+r+1-i \\ r-i \end{bmatrix}_q$$

ceea ce demonstrează (3).

BIBLIOGRAFIE

1. A. Dragomir, P. Dragomir, „Consequenze algebriche della formula che da il numero dei sottospazi di un S proietivo". (Atti del Convengo Internazzionale die Geometria Combinatoria e sue Applicazioni, Perugia, 1970).
2. P. Ceccherini, A. Dragomir, „Combinazzioni generalizzate, q-coefficienti binomiali e spazi grafici" (Atti del Convengo Internazzionale di Geometria Combinatoria e sue Applicazioni, Perugia, 1970).

3. P. Ceccerini, A. Dragomir, „Dimonstrazione di alcune q-identita" (Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, 1972).
4. A. Dragomir, V. Laziun, „On the rank of matrices with elements from a finite field" (Seminar Arghiriade, 1974).
5. A. Dragomir, V. Laziun, „Applications of generalized Combination (Seminar Arghiriade, 1974).
6. A. Dragomir, J.L. Lavoie, „q-identități și aplicații", (sub tipar).
7. J. Goldman, C. Rotta, „On the fundation of Combinatorial Theory (Springer Verlag, Berlin 1964).
8. L. Toscano, „Numeri di Stirling generalizzati e operatori permutabili di secondo ordine" (Le Matematiche vol. XXIV fasc. 2 (1969).

SUMARY

The present paper proposes to give solutions to some applications of the generalized combination regarding of q-binomial formulaes of type (1), (2), (3).

It is known, that these generalised combinations, have similar properties with the combinations without repetition, as (2.1), (3.2) and we shall give (1), (2), (3).

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia"fTimişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 27 (41) **Fascicola 1**

APROXIMAREA SOLUŢIEI UNOR ECUAŢII INTEGRALE NELINIARE

DE

PAVEL NĂSLĂU

Primită la redacţie la 14 IV 1981.

Scopul acestei lucrări este de a construi o funcţie spline de ordinul m care să aproximeze soluţia unor ecuaţii integrale neliniare, cu ambele limite de integrare variabile.

Fie ecuaţia

$$y(x)=\int_{-x}^{x} K(x, t, y(t))\,dt+f(x) \tag{1}$$

unde $K(x, t, y)$ are derivate parţiale pînă la ordinul $m-1$ şi satisface condiţia lui Lipschitz :

$$|K(x, t, y_1)-K(x, t, y_2)| \leqslant L\,|y_1-y_2| \tag{2}$$

pentru $(x, t) \in [-a, a] \cdot [-a, a]$ iar $f(x)$ are derivata pînă la ordinul $m-1$ în vecinătatea lui $x=0$.

Algoritmul obişnuit de construcţie a funcţiei spline folosit în cazul ecuaţiilor integrale de tip Volterra [1, 2, 3, 4, 5] nu se poate aplica în acest caz deoarece limitele de integrare ale ecuaţiei (1) nu permit determinarea funcţiei spline pe intervalele succesive, de la stînga la dreapta, ale unei diviziuni a intervalului de integrare. Vom folosi un algoritm analog cu cel folosit în [6] pentru cazul liniar. Fie :

$$\Delta : -a=-nh<-(n-1)\,h< \ldots <-h<0<h< \ldots <nh=a \tag{3}$$

o diviziune uniformă a lui $[-a, a]$. Funcţia spline de ordinul m corespunzătoare diviziunii Δ se construieşte astfel :

$$s(0)=f(0)\,;\ s^{(r)}(0)=y^{(r)}(0),\ r=\overline{1, m-1} \tag{4}$$

unde $y^{(r)}(0)$ rezultă din (1) prin derivare,

$$s(x)=\sum_{r=0}^{m-1} \frac{(x-ph)^r}{r!}\,s^{(r)}(ph)+(x-ph)^m a_p, \quad \forall\, x \in (ph,\ (p+1)\,h] \tag{5}$$

$$s(x)=\sum_{r=0}^{m-1} \frac{(x+ph)^r}{r!}\,s^{(r)}(-ph)+(x+ph)^m b_p \quad \forall\, x \in [-(p+1)\,h,\ -ph)$$

unde $p=\overline{0, n-1}$, iar a_p şi b_p sînt constante nedeterminate.

Se observă că $s(x)$ definită prin (4) şi (5) este o funcţie spline polinomială de gradul m şi de clasă $C^{m-1}_{[-a,a]}$ corespunzătoare diviziunii Δ.

Lemă. Fie sistemul algebric neliniar :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j) \qquad i=\overline{1,\ n} \tag{6}$$

Dacă :

$$| f_{ij}(x_j^1) - f_{ij}(x_j^2) | \leqslant L_{ij} | x_j^1 - x_j^2 |$$

pentru $i, j=\overline{1\ n}$ și $\sum_{j=1}^{n} L_{ij} < 1$ pentru $i=\overline{1, n}$ atunci soluția sistemului (6) există și este unică.

Demonstrație : Se aplică Teorema 11.2.3 din [7].

Teoremă. Dacă h satisface inegalitatea

$$h < (m+1)/(2L) \tag{7}$$

atunci funcția spline $s(x)$ care satisface condițile (4) și (5) și verifică ecuația (1) în punctele diviziunii Δ există și este unică.

Demonstrație. Funcția spline $s(x)$ este determinată dacă se cunosc constantele a_p și b_p, $p=\overline{0,\ n-1}$. Acestea se determină succesiv, impunîndu-se lui $s(x)$ să verifice ecuația (1) în $(p+1)h$ și $-(p+1)h$:

$$\sum_{r=0}^{m-1} \frac{h^r}{r!} s^{(r)}(ph) + h^m a_p = f((p+1)h) + \sum_{i=-p}^{p-1} \int_{ih}^{(i+1)h} K((p+1)h,\ t,\ s(t))\,dt +$$

$$+ \int_{-(p+1)h}^{-ph} K\left((p+1)h,\ t,\ \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(t+ph)^r}{r!} s^{(r)}(-ph) + (t+ph)^m b_p\right) dt +$$

$$+ \int_{ph}^{(p+1)h} K\left((p+1)h,\ t,\ \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(t-ph)^r}{r!} s^{(r)}(ph) + (t-ph)^m a_p\right) dt \tag{8}$$

$$\sum_{r=0}^{m-1} \frac{(-h)^r}{r!} s^{(r)}(-ph) + (-h)^m b_p = f(-(p+1)h - \sum_{i=-p}^{p-1} \int_{ih}^{(i+1)h} K(-(p+$$

$$+1)h, t, s(t))\,dt - \int_{-(p+1)h}^{-ph} K\left(-(p+1)h,\ t,\ \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(t+ph)^r}{r!} s^{(r)}(-ph) + (t+ph)^m b_p\right) dt -$$

$$- \int_{ph}^{(p+1)h} K\left(-(p+1)h,\ t,\ \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(t-ph)^r}{r!} s^{(r)}(ph) + (t-ph)^m a_p\right) dt$$

Sistemul (8) se scrie sub forma :

$$a_p = c_{p1} + f_{11}(a_p) + f_{12}(b_p) \tag{9}$$

$$b_p = c_{p2} + f_{21}(a_p) + f_{22}(b_p)$$

unde :

$$f_{11}(a_p)=h^{-m}\int_{ph}^{(p+1)h} K\left((p+1)h,\ t,\ \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(t-ph)^r}{r!}s^{(r)}(ph)+(t-ph)\ a_p\right)dt$$

$$f_{12}(b_p)=h^{-m}\int_{-(p+1)h}^{ph} K\left((p+1)h,\ t,\ \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(t+ph)^r}{r!}s^{(r)}(-ph)+(t+ph)^m a_p dt\right.$$

$$f_{21}(a_p)=(-h)^{-m}\int_{ph}^{(p+1)h} K\left(-(p+1)h,\ t,\ \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(t-ph)^r}{r!}s^{(r)}(ph)+(t-ph)^m a_p\right)dt$$

$$f_{22}(b_p)=-(-h)^{-m}\int_{-(p+1)h}^{-ph} K\left(-(p+1)\ h,\ t,\ \sum_{r=0}^{m-1}\frac{(t+ph)^r}{r!}s^{(r)}(-ph)+\right.$$

$$\left.+(t+ph)^m\ b_p\right)dt$$

În condiţiile (2) rezultă că funcţiile f_{ij} satisfac condiţia lui Lipschitz :

$$\begin{aligned} |f_{i1}(a_{p1})-f_{i1}(a_{p2})| &\leqslant \frac{Lh}{m+1}|a_{p1}-a_{p2}| \\ |f_{i2}(b_{p1})-f_{i2}(b_{p2})| &\leqslant \frac{Lh}{m+1}|b_{p1}-b_{p2}| \end{aligned} \tag{10}$$

Se aplică Lema precedentă sistemului (9) ţinînd seama de condiţiile (7) şi (10).

Observaţie : Algoritmul de mai sus se poate generaliza şi pentru funcţiile spline cu deficienţă $k>1$. Rămîne însă deschisă problema convergenţei.

BIBLIOGRAFIE

1. Hung H. S., Application of linear spline function to the numerical solution of Volterra integral equations of the second Kind, Comp. Sci. Tech. Rept. 27 July, 1968.
2. Hung H. S., The numerical solution of differential and integral equations by spline functions, MRC Tech., Summary Rept., Madison March, 1970.
3. Micula M. et Micula C., Sur la rezolution numerique des equations integrales du tipe de Voltera de seconde espèce à l'aide des fonctions splines, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. mat. mec. fasc. 2, 1973, pp. 65—68.
4. Micula C., The numerical solution of Volterra integro-differential equations by spline functions, Rev. Roum. de math. pures et appl., Tom XX, nr. 3, 1975, pp. 349—358.
5. Micula C., Funcţii spline şi aplicaţii, Ed. tehnică, Bucureşti, 1978.
6. Năslău P., Asupra unor ecuaţii integrale cu ambele limite de integrare variabile, Seminarul itinerant de ecuaţii funcţionale, aproximare şi converxitate, 1980, Timişoara, pp. 187—190.
7. Rus A. I., Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

APROXIMATION OF SOLUTION OF SOME NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS

(ABSTRACT)

The aim of this paper is at constructing a spline function wich approximates solution of nonlinear integral equation

$$y(x)=\int_{-x}^{x} K(x, t, y(t))\,dt+f(x)$$

A sufficient condition for existence and oneness is given.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 27 (41) **Fascicola 1**

CARACTERIZAREA APROAPE-PERIODICITĂŢII UNEI APLICAŢII MULTIVOCE CU AJUTORUL ŞIRURILOR GENERALIZATE

DE

T. BÂNZARU şi N. CRIVĂŢ

Primită la redacţie la 20 IV 1981.

În [1] se defineşte pentru o aplicaţie multivocă $F : R \to (X, \mathfrak{H})$, unde $(X, \mathfrak{H})$ este un spaţiu uniform, noţiunea de aproape-periodicitate ca o extensie naturală a noţiunii de funcţie aproape-periodică în sensul lui Bochner (a se vedea [4] sau [5]). În acelaşi cadru, în [2] se defineşte noţiunea de aplicaţie multivocă normală şi se dau condiţiile în care aproape-periodicitatea este echivalentă cu normalitatea, condiţii ce constituie o generalizare la aplicaţiile multivoce a unui rezultat cunoscut în teoria funcţiilor aproape-periodice.

În această lucrare se demonstrează două teoreme de caracterizare a noţiunii de aproape-periodicitate pentru limita unui şir generalizat de aplicaţii multivoce aproape-periodice.

Pe tot parcursul lucrării aplicaţiile multivoce vor fi definite pe R, cu valori într-un spaţiu uniform $(X, \mathfrak{H})$ şi vor fi presupuse continue în sensul lui C. Berge din [3]. Notaţiile şi definiţiile vor fi cele utilizate în lucrările citate anterior.

Teorema 1. Dacă $(F_i)_{i \in D}$ este un şir generalizat de aplicaţii multivoce uniform convergent la aplicaţia multivocă F, atunci condiţia necesară şi suficientă ca F să fie aproape-periodică este ca pentru orice $H \in \mathfrak{H}$ şi orice $i \in D$ să existe $j \in D$, $j > i$, şi $l(H, i) > 0$ astfel ca în orice interval de lungime $l(H, i)$ să existe t cu proprietatea:

$$F_j(x+t) \subset H(F_j(x)),\ \forall\, y \in F_j(x)\quad H(y) \cap F_j(x+t) \neq \emptyset,\ \forall\, x \in R.$$

Demonstraţie. Necesitatea. Presupunem că $(F_i)_{i \in D}$ converge uniform la F şi că F este aproape-periodică. Fie $H \in \mathfrak{H}$ şi H', H'' anturaje simetrice cu $H' \circ H' \subset H$ şi $H'' \circ H'' \subset H'$. Atunci există $i_1(H')$, $i_2(H'')$ şi $l(H) > 0$ astfel ca pentru orice $k \in D$ cu $k > i_1(H')$, $k > i_2(H'')$ şi orice $x \in R$, avem

$$F_k(x) \subset H'(F(x)),\ \forall\ y \in F(x)\ \ H'(y) \cap F_k(x) \neq \emptyset \tag{1}$$

$$F_k(x+t) \subset H''(F(x+t)),\ \forall\, y \in F(x+t)\ \ H''(y) \cap F_k(x+t) \neq \emptyset \tag{2}$$

unde t este o H''-aproape-perioadă arbitrară pentru F, adică

$$F(x+t) \subset H''(F(x)),\ \forall\, y \in F(x)\quad H''(y) \cap F(x+t) \neq \emptyset \tag{3}$$

Fie $i \in D$ arbitrar şi k pentru care au loc (1) şi (2). Din proprietăţile mulţimilor dirijate rezultă că există $j \in D$ cu $j > i$ şi $j > k$. Dar atunci, pentru acest $j \in D$, au loc simultan relaţiile:

$$F_j(x) \subset H'(F(x)),\ \forall\, y \in F(x)\quad H'(y) \cap F_j(x) \neq \emptyset \tag{1'}$$

şi

$$F_j(x+t) \subset H''(F(x+t)),\ \forall\, y \in F(x+t)\ \ H''(y) \cap F_j(x+t) \neq \emptyset \tag{2'}$$

pentru orice $x \in R$ și orice H'' -aproape-perioadă t.
Din (2') și (3) rezultă

$$F_j(x+t) \subset H'(F(x)), \quad \forall y \in F(x) \; H'(y) \cup F_j(x+t) \neq \emptyset \quad \forall x \in R, \tag{4}$$

iar din (4) și (1'), rezultă

$$F_j(x+t) \subset H(F_j(x)), \quad \forall y \in F_j(x) \quad H(y) \cap F_j(x+t) \neq \emptyset, \quad \forall x \in R$$

și necesitatea este demonstrată.

Suficiența. Presupunem că șirul generalizat $(F_i)_{i \in D}$ care converge uniform la F satisface condiția din enunțul teoremei. Vom arăta că F este aproape-periodică.

Fie $H \in \mathfrak{H}$ și $H' \in \mathfrak{H}$ simetric astfel ca $H' \circ H' \circ H' \subset H$. Din convergența uniformă a șirului generalizat $(F_i)_{i \in D}$ la F rezultă că există $k(H') \in D$ astfel ca pentru orice $m > k(H')$, avem :

$$F_m(x) \subset H'(F(x)), \quad \forall y \in F(x) \; H'(y) \cap F_m(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in R$$

Dar conform ipotezei, pentru $H' \in \mathfrak{H}$ și $k(H') \in D$ există $j \in D$ $j > k(H')$ și $l(H', k(H')) = l_1(H') > 0$, astfel ca în orice interval de lungime $l_1(H')$ există t cu proprietatea

$$F_j(x+t) \subset H'(F_j(x)), \quad \forall y \in F_j(x) \; H'(y) \cap F_j(x+t) \neq \emptyset, \; \forall x \in R \tag{5}$$

Cum $j > m(H')$, avem :

$$F_j(x) \subset H'(F(x)), \quad \forall y \in F(x) \; H'(y) \cap F_j(x) \neq \emptyset, \; \forall x \in R. \tag{1''}$$

Înlocuind în această relație pe x cu $x+t$, vom obține

$$F_j(x+t) \subset H'(F(x+t)), \quad \forall y \in F(x+t) \; H'(y) \cap F_j(x+t) \neq \emptyset. \tag{1'''}$$

Fie $y \in F(x+t)$. Din (1''') rezultă că există $z \in F_j(x+t)$ astfel ca $(y, z) \in H'$, iar din (5) rezultă că există $u \in F_j(x)$ astfel ca $(z, u) \in H'$. În sfîrșit, din (1'') rezultă că există $v \in F(x)$ astfel ca $(u, v) \in H'$. Deci $(y, v) \in H' \circ H' \circ H'$. Cum H' este simetric, $(v, y) \in H' \circ H' \circ H' \subset H$, adică $y \in H(v) \subset H(F(x))$. Cum y a fost arbitrar, avem

$$F(x+t) \subset H(F(x)) \tag{6}$$

Fie acum $y \in F(x)$. Conform (1'') va exista $z \in F_j(x)$ astfel ca $(y, z) \in H'$, iar conform (5) există $u \in F_j(x+t)$ astfel ca $(z, u) \in H'$. Folosind din nou (1'') rezultă că există $v \in F(x+t)$ astfel ca $(u, v) \in H'$. Atunci $(y, v) \in H' \circ H' \circ H' \subset H$, adică $v \in H(y)$ și deci $H(y) \cap F(x+t) \neq \emptyset$. În concluzie avem

$$\forall \; y \in F(x) \; H(y) \cap F(x+t) \neq \emptyset \tag{7}$$

Cum H și x au fost arbitrari, din (6) și (7) rezultă că F este aproape-periodică și teorema este demonstrată.

Înainte de a demonstra Teorema 2, vom da următoarea definiție, care extinde la aplicații multivoce o noțiune cunoscută de la funcții (a se vedea de exemplu [6]).

Definiție. Vom spune că un șir generalizat de aplicații multivoce este egal aproape-periodic dacă pentru orice $H \in \mathfrak{H}$ există un număr pozitiv $l(H)$ astfel încît orice interval de lungime $l(H)$ conține un număr t care este H-aproape-perioadă pentru toți termenii șirului.

Teorema următoare caracterizează aproape-periodicitatea unei aplicații multivoce cu ajutorul șirurilor generalizate de aplicații multivoce egal aproape-periodice.

Teorema 2. Aplicația multivocă F este aproape-periodică dacă și numai dacă există un șir generalizat de aplicații multivoce egal aproape-periodic care converge (punctual) către ea.

Demonstrație. Necesitatea este imediată alegînd o mulțime dirijată D arbitrară și $F_i = F$ pentru orice $i \in D$. Șirul generalizat $(F_i)_{i \in D}$, satisface condițiile cerute.

Suficiența. Fie $(F_i)_{i \in D}$ un șir generalizat de aplicații multivoce egal aproape-periodic, care converge punctual la F. Vom demonstra că F este aproape-periodică.

Fie $H \in \mathfrak{H}$ și H' un anturaj simetric, astfel ca $H' \circ H' \circ H' \subset H$. Șirul generalizat $(F_i)_{i \in D}$, fiind egal aproape-periodic, va exista $l(H') > 0$, astfel încît orice interval de lungime $l(H')$ conține un t cu proprietatea

$$F_i(x+t) \subset H'(F_i(x)),\ \forall y \in F_i(x)\ H'(y) \cap F_i(x+t) \neq \emptyset,$$

$$\forall x \in R,\ \forall i \in D. \tag{8}$$

Fie $x \in R$ și t H'-aproape-perioadă arbitrară a termenilor șirului generalizat. Din convergența șirului $(F_i)_{i \in D}$ către F și din proprietățile mulțimilor dirijate, rezultă că există elementele $i_1(x, H')$, $i_2(x+t, H')$ și i din D, cu $i > i_1(x, H')$, $i > i_2(x+t, H')$, astfel încît să avem :

$$F_i(x) \subset H'(F(x)),\ \forall y \in F(x)\ \ H'(y) \cap F_i(x) \neq \emptyset \tag{9}$$

și

$$F_i(x+t) \subset H'(F(x+t)),\ \forall y \in F(x+t)\ H'(y) \cap F_i(x+t) \neq \emptyset \tag{10}$$

Fie $y \in F(x+t)$ arbitrar. Din (10) rezultă că există $z \in F_i(x+t)$ astfel ca $(y, z) \in H'$, iar din (8) rezultă că există $u \in F_i(x)$ astfel încît $(z, u) \in H'$. În sfîrșit, din (9) rezultă că există $v \in F(x)$ astfel încît $(u, v) \in H'$. Atunci $(y, v) \in H' \circ H' \circ H'$. Cum H' este simetric, și $(v, y) \in H' \circ H' \circ H' \subset H$, adică $y \in H(v) \subset H(F(x))$ și deci

$$F(x+t) \subset H(F(x)) \tag{11}$$

Fie acum $y \in F(x)$. Va exista, conform (9), un $z \in F_i(x)$ astfel ca $(y, z) \in H'$, iar conform (8), un $u \in F_i(x+t)$ astfel ca $(z, u) \in H'$. Din (10) va exista un $v \in F(x+t)$ astfel ca $(u, v) \in H'$. Deci $(y, v) \in H' \circ H' \circ H' \subset H$, adică $v \in H(y)$. Dar $v \in F(x+t)$, iar y a fost ales arbitrar, deci

$$\forall y \in F(x)\ H(y) \cap F(x+t) \neq \emptyset \tag{12}$$

Relațiile (11) și (12) arată că teorema este demonstrată.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Bânzaru, Aplicații multivoce aproape-periodice. Buletinul Șt. Tehnic. Inst. Politehnic Timișoara, Seria Mat.-Fizică-Mecanică, 19 (33), Fasc. 1 (1974), 25—28.
2. T. Bânzaru, N. Crivăț, Asupra aplicațiilor multivoce aproape-periodice cu valori în spații uniforme. Comunicată la Colocviul Național de Geometrie și Topologie „Gh. Vrănceanu" Vaslui-Valea Hogei-Bacău, 1980. Va pare în lucrările colocviului.

3. C. Berge, Espaces topologiques. Functions multivoques Dunod, Paris 1959.
4. S. Bochner, Abstrakte fastperiodische Funktionen. Acta Mathematica, 61 (1933), 149—184.
5. C. Corduneanu, Funcţii aproape-periodice. Editura Academiei, R.P.R., 1961.
6. M. Nicolescu, Analiză matematică, vol. II, Editura tehnică, 1958.
7. W. J. Thron, Topological structures, Holt Rinehart, 1966.

NETS AND ALMOST-PERIODICITY FOR MULTIFUNCTIONS

(ABSTRACT)

Let $F : \mathbb{R} \to (X, \mathfrak{H})$ be an almost-weriodic multifunction, where $(X, \mathfrak{H})$ is a uniform space.

In this note we prove two theorems for characterization of almost-periodicity for F by uniform convergent, respectivellly punctual convergent, nets of multifunctions.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara
MATEMATICĂ—FIZICĂ
Tom. 27 (41) Fascicola 1

UN PROCEDEU DE ÎMBUNĂTĂŢIRE A TRANSMITERII CĂLDURII ÎN HELIOCONVERTOARELE PLANE INDUSTRIALE

DE

C. de SABATA, P. CRĂCIUN, R. BAEA

Primită la redacţie la data de 2 XII 1980.

1. Introducere,

Utilizarea energiei solare pentru încălzirea unor materiale aflate în rezervoare, hale sau bataluri voluminoase, ridică probleme constructive dificile legate de distanţa mare existentă între acoperişul amenajat ca helioconvertor plan şi masa de material ce trebuie încălzit. Situaţia este deosebit de dificilă atunci cînd, pe parcursul exploatării volumul de material se reduce prin consum şi hala sau batalul sînt numai parţial pline. Înclinarea acoperişului, amenajat ca helioconvertor, impusă de consideraţii astronomice de înălţimea soarelui pe cer şi de perpendicularitatea razelor pe acoperiş, măreşte şi mai mult distanţa lui de material, în special în zona coamei sale.

Volumul activ al helioconvertorului devine astfel foarte mare şi studiile efectuate pe machete similare nu pot fi extrapolate, aşa cum s-a constatat în cazul instalaţiilor de hale industriale.

2. Aspecte experimentale.

Cercetările sintetizate în prezenta lucrare s-au efectuat pe un batal avînd dimensiunile şi forma prezentată în fig. 1.

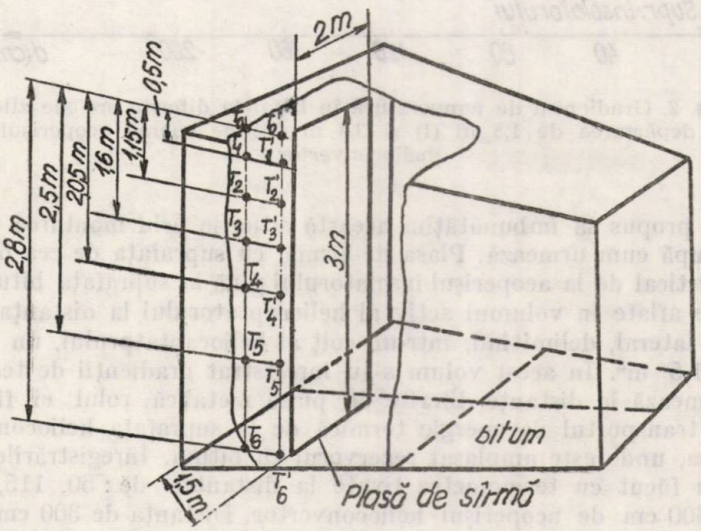


Fig. 1. Schema batalului amenajat cu helioconvertoare plane

Măsurătorile efectuate au scos în evidență faptul că datorită volumului mare de aer aflat între acoperiș și materialul din batal (bitum) gradientul de temperatură nu avea un aspect convenabil (fig. 2), datorită calității slabe de conducție a aerului sub acoperiș.

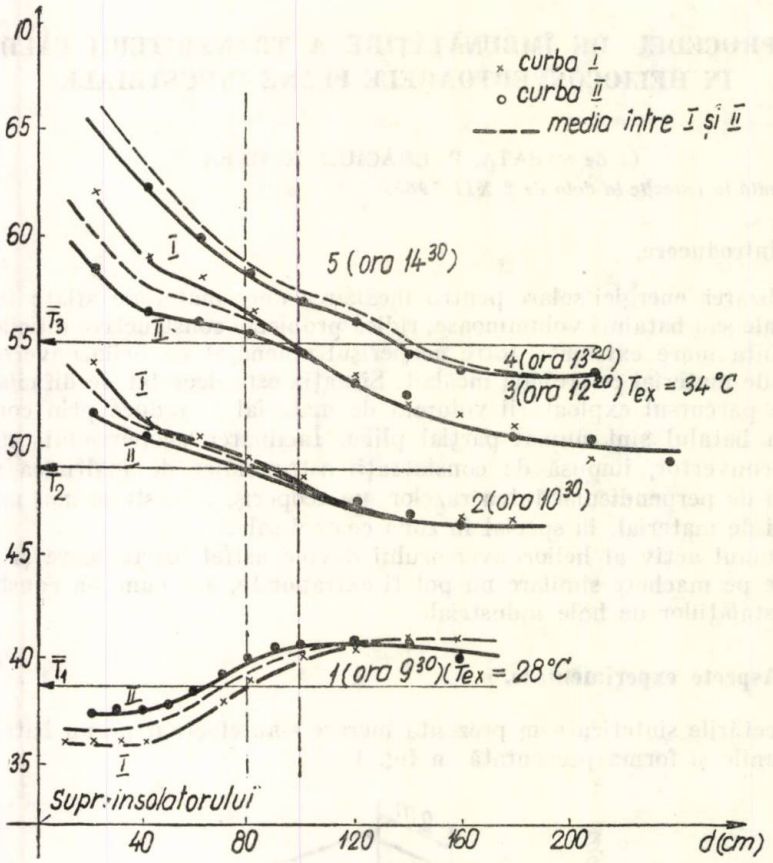
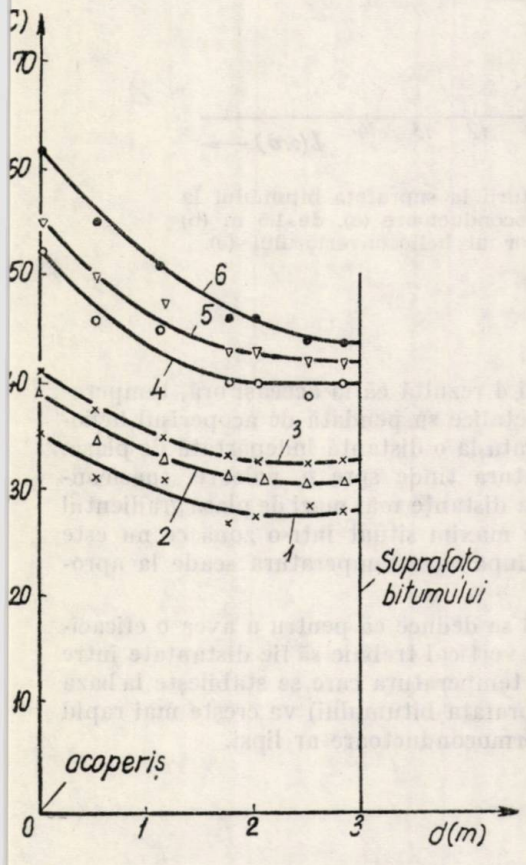


Fig. 2. Gradientul de temperatură în batal la diferite ore ale zilei, la depărtarea de 1,5 m (I) și 3,5 m (II) de coama acoperișului helioconvertor.

Ne-am propus să îmbunătățim această situație prin montarea unei plase metalice, după cum urmează. Plasa de sîrmă, cu suprafața de cca 6 m^2 a fost montată vertical de la acoperișul insolatorului pînă la suprafața bitumului din rezervoarele aflate în volumul activ al heliocaptatorului la distanța de 1,5 m de peretele lateral, delimitînd, într-un colț al heliocaptatprului, un volum de cca $3 \times 2 \times 1{,}5$ m^3. În acest volum s-au înregistrat gradienții de temperatură care se formează la distanțe diferite de plasa metalică, rolul ei fiind acela de a mări transportul de energie termică de la suprafața helioconvertorului spre baza sa, unde este amplasat rezervorul cu bitum. Înregistrările temperaturilor s-au făcut cu termometre fixate la distantele de : 50, 115, 160, 205, 250, 280, 300 cm de acoperișul helioconvertor. Distanța de 300 cm a coincis cu suprafața bitumului din rezervorul aflat în incinta helioconvertorului.

3. **Rezultatele măsurătorilor.**

În fig. 3 sînt redate curbele de modificare a temperaturii în funcţie de depărtarea (d) de la acoperişul batalului. Înregistrările au fost efectuate în vecinătatea plasei, la distanţa de 0,2 m de aceasta. Curbele 1, 2, 3, 4, 5 şi 6 din figura 3 reprezintă gradientul de temperatură înregistrat la orele respective: 9, 10, 11, 12, 13, 14 ale unei zile (2/3 senină), în vecinătatea plasei la 0,2 m de aceasta.



3. Gradientul de temperatură în prezenţa plase metalice termoconductoare, la dis- a de 0,2 m de ea la diverse ore: 9 (1), 10 (2), 11 (3), 12 (4), 13 (5), 14 (6).

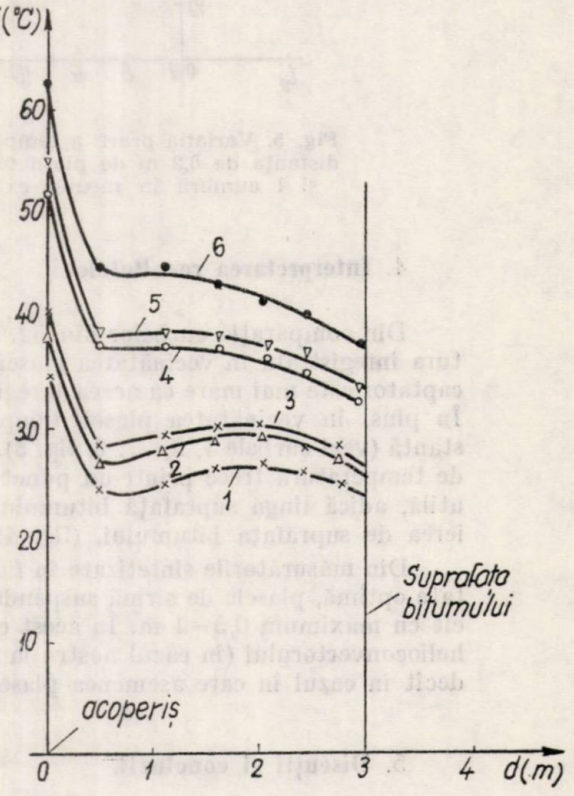


Fig. 4. Gradientul de temperatură la distanţa de 1,5 m de plasa termoconductoare, la aceleaşi ore: 9 (1), 10 (2), 11 (3), 12 (4), 13 (5), 14 (6).

Curbele similare cu cele din fig. 3 înregistrate la distanţa de 1,5 m de plasa metalică termoconductoare sînt ilustrate în fig. 4.

În fig. 5 este redat modul în care evoluează în decursul unei zile, temperatura aerului din incinta helioconvertorului, la suprafaţa bitumului, lîngă plasă, adică la 0,2 m (a) şi la distanţa de 1,5 m (b). Temperaturile mediului exterior, măsurate la umbră sînt redate funcţie de timp curba (c).

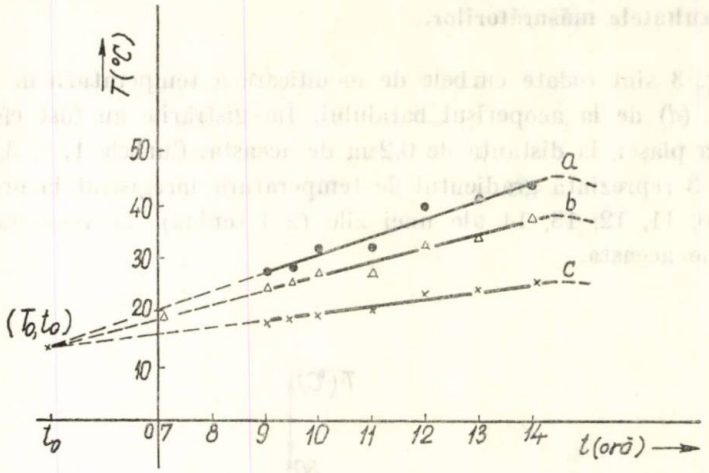


Fig. 5. Variaţia orară a temperaturii la suprafaţa bitumului la distanţa de 0,2 m de plasa termoconductoare (a), de 1,5 m (b) şi 1 aumbră în mediul exterior al helioconvertorului (c).

4. Interpretarea rezultatelor i

Din comparaţia curbelor din fig. 3 şi 4 rezultă că la aceeaşi oră, temperatura înregistrată în vecinătatea plasei metalice suspendată de acoperişul heliocaptator este mai mare ca aceea înregistrată la o distanţă îndepărtată de plasă. În plus, în vecinătatea plasei, temperatura tinde spre o valoare cuasiconstantă (vezi curbele 1, 2, ... 6, fig. 3). La distanţe mai mari de plasă gradientul de temperatură trece printr-un punct de maxim situat într-o zonă ce nu este utilă, adică lîngă suprafaţa bitumului, după care temperatura scade la aproierea de suprafaţa bitumului, (fig. 4).

Din măsurătorile sintetizate în fig. 3 se deduce că pentru a avea o eficacitate optimă, plasele de sîrmă suspendate vertical trebuie să fie distanţate între ele cu maximum 0,5–1 m. În acest caz temperatura care se stabileşte la baza helioconvertorului (în cazul nostru la suprafaţa bitumului) va creşte mai rapid decît în cazul în care asemenea plase termoconductoare ar lipsi.

5. Discuţii şi concluzii.

În cazul heliocaptatorului descris mai sus se poate considera că temperatura de la baza lui se modifică liniar, în timp, în cursul zilei ; la început, între orele 9–14 crescător (fig. 5), iar apoi, după amiază, panta devine negativă. În cazul machetelor curba de dependenţă a temperaturii de timpul de iradiere solară se apropie mai mult de o lege exponenţială [1, 2].

Plecînd de la rezultatele concentrate în fig. 5 se poate scrie corelaţia dintre temperatura (T) înregistrată la baza helioconvertorului şi momentul măsurării ei (t), pentru cazurile :

a) măsurătoarea s-a efectuat lîngă plasa metalică termoconductoare (la 0,2 m T_a) ;

b) departe de ea (la 1,5 m distanţă T_b) ;

c) în aerul atmosferic la umbră (T_c).

$$T_a - T_0 = \alpha\,(t - t_0) \tag{1}$$

$$T_b - T_0 = \beta\,(t - t_0) \tag{2}$$

$$T_c - T_0 = \gamma\,(t - t_0) \tag{3}$$

unde α, β, γ sînt pantele celor trei drepte, iar T_0 temperatura la momentul t_0.

Considerînd randamentul de încălzire al helioconvertorului ca fiind proporţional cu creşterea temperaturii din interior, în comparaţie cu temperatura exterioară heliconvertorului (T_e), se va putea scrie expresia randamentului de încălzire pentru helioconvertorul prevăzut cu plasă, calculat la o anumită oră t din zi:

$$\eta_{at} = K\,(T_a - T_e) \tag{4}$$

unde K este un factor de proporţionalitate.

Întrucît aşa cum rezultă şi din fig. 4, la distanţa de 1,5 m de plasă eficacitatea plasei este neglijabilă, se va putea scrie pentru randamentul de încălzire al helioconvertorului, în lipsa plasei termoconductoare, pentru aceeaşi oră din zi, expresia:

$$\eta_{bt} = K\,(T_b - T_e) \tag{5}$$

K fiind acelaşi factor ca în (4), pentru acelaşi moment (t) considerat.

Ţinînd cont de relaţiile (1 – 5) se poate calcula fracţiunea cu care ar putea creşte randamentul de încălzire al helioconvertorului plan industrial dacă -ar folosi plase metalice suspendate de acoperişul helioconvertorului, la dissanţe mai mici de 1 m între ele:

$$\frac{\eta_a}{\eta_b} = \frac{K(t-t_0)(\alpha-\gamma)}{K(t-t_0)(\beta-\gamma)} = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} = \text{const.} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}-1}{\frac{\beta}{\gamma}-1} = \frac{\delta-1}{\delta'-1} \tag{1}$$

unde $\alpha/\gamma = \delta$ şi $\beta/\gamma = \delta'$.

Din diagramele fig. 5 s-au găsit pentru cele trei pante valorile: 3,4; 2,5; 1,5 grad/oră, cu ajutorul cărora, înlocuite în ec. (6) s-a obţinut:

$$\eta_a = 1{,}9\,\eta_b \tag{6'}$$

adică randamentul de încălzire al helioconvertorului se poate dubla în prezenţa unor perdele de plase metalice.

Din constatările făcute, randamentul de încălzire se modifică în cursul unei zile. Pantele α, β, γ fiind constante, cel puţin pentru prima jumătate din zi în care au fost ridicate curbele de mai sus, va rezulta, conform ec. (6), că randamentul de încălzire al helioconvertorului prevăzut cu plasă termoconductoare va fi, în orice moment din zi, cu aceeaşi fracţiune mai mare decît randamentul global obţinut în lipsa unei plase termoconductoare, ceea ce se traduce evident prin economii suplimentare de combustibil convenţional.

În concluzie, cercetările făcute pe o hală pilot prevăzută cu helioconvertoare plane drept acoperiş au scos în evidenţă următoarele:

1. nu se poate face extrapolarea rezultatelor experimentale, de la macheta similară la hala industrială decît cu o aproximaţie redusă;

2. prezenţa unui volum mare de aer între helioconvertor şi materialul ce trebuie încălzit influenţează negativ funcţionarea instalaţiei;

3. o îmbunătăţire importantă se poate aduce prin montarea unor plase metalice la distanţa de circa 0,5 m una de alta, suspendate între acoperiş şi suprafaţa materialului ce trebuie încălzit cu energie solară ;

4. Randamentul de încălzire se măreşte în acest caz de aproape două ori.

BIBLIOGRAFIE

1. C. De S a b a t a, I. L u m i n o s u, Bul. şt. tehn. (I.P.T.) 24, 55 (1978).
2. C. De S a b a t a, şi col. Bul. şt. tehn, (I.P.T) 24, 43 (1978).

UN PROCÉDÉ POUR L'AMÉLIORATION DU TRANSFER DE LA CHALEUR DANS LES HÉLIOCONVERTEURS PLANS INDUSTRIELS

RÉSUMÉ

Dans l'ouvrage on fait l'analyse des resultats d'un étude expérimental effectués sur une station-pilote pour le préchauffage du bitume en utilisand l'énérgie solaire.

On propose une solution pratique pour l'ameléioration du rendement de chauffage par l'utilisation de plases métalliques.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 27 (41) Fascicola 1

ASUPRA STRUCTURILOR MAGNETICE LA MAGNEŢII PERMANENŢI DE TIP ALNICO 1 500 OBŢINUTE PRIN TEHNICA BITTER

DE

C. DE SABATA, M. BOLDAN, M. GANGAL

Primită la redacţie la data de 18 II 1981.

1. Consideraţii asupra materialului.

Magneţii permanenţi de tip ALNICO 1500 intră în componenţa circuitului magnetic al instrumentelor electrice de măsură ; ei trebuie să aibe o structură magnetică stabilă, care să le confere proprietăţile impuse de utilizarea lor la aceste instrumente, astfel încît, în timp, ele să nu iasă din clasa de precizie.

În acord cu literatura [1], materialul magnetic ALNICO 1500 este format din martensită sau bainită, obţinute prin transformarea austenitei, o soluţie de $Fe_\gamma C$.

Martensita este obţinută din austenită prin răcire rapidă, fiind o soluţie solidă, suprasaturată cu carbon, în fier α, (Fe_α). Deşi are bune proprietăţi magnetice şi o greutate specifică redusă, ea prezintă dezavantajul de a fi un constituent instabil şi, la schimbarea stării energetice a sistemului, trece în ferită şi cementită.

Dacă materialul este încălzit, trece din structura tetragonală în cubică (spre 473 °K) iar spre 973 °K carbonul se separă, formînd Fe γC şi reţeaua cubică a martensitei se tranformă în reţeaua cubică a feritei, după reacţia :

$$Fe_\gamma (C) \rightarrow Fe_\alpha (C) + Fe_x (C) \qquad (1)$$

Se formează astfel un amestec mecanic din ferită suprasaturată cu carbon şi carburi de tipul Fe_x (C), numită bainită.

Acele de ferită suprasaturată se formează de-a lungul planelor [111], iar carburile precipită în interiorul acelor de ferită şi sînt paralele între ele.

Precipitările de carburi formează unghiuri de 60° în direcţia acelor de ferită şi sînt paralele între ele.

La temperaturi inferioare punctul Curie (850 °C) structura de tip α a materialului se descompune în două faze :

α_1 — este o structură cubică centrată, bogată în Fe şi Co şi este sub formă de particule elipsoidale, cu o puternică anizotropie de formă ;

α_2 — formează o matrice, bogată în Ni şi Al, cu slabe proprietăţi magnetice, pe care se află aşezate particulele elipsoidale ale fazei α_1.

Compoziţia celor două faze, după [2], este :

matricea α_2 : Fe 27% ; Ni 48% ; Al 21% ; Cu 4%

precipitatul α_1 : Fe 57% ; Co 29% ; Ni 6% ; Al 5% ; Cu 5%.

Granulaţia fină a percipitatului măreşte coercivitatea iar orientarea acestuia determină creşterea remanenţei : anizotropia de formă a particulelor α_1 determină bunele proprietăţi ale magneţilor ALNICO.

2. Cercetări experimentale.

S-a folosit pentru vizualizarea structurii de domenii a magneţilor o suspensie feroferică dată de [3]. Ea a fost verificată pe materiale nemagnetice şi a corespuns aşa cum se vede din fig. 1.

Pe faţa fin polizată a magneţilor, suspensia trasează net conturul cristalitelor, aşa cum se vede în fig. 2, fig. 3, fig. 4, în ultimele două fiind evidenţiate incluziunile nemagnetice, precipitări ale carbonului, care deteriorează proprietăţile acestor magneţi. Dimensiunile cristalitelor sînt de $(0{,}3 \sim 1{,}5)$ μm.

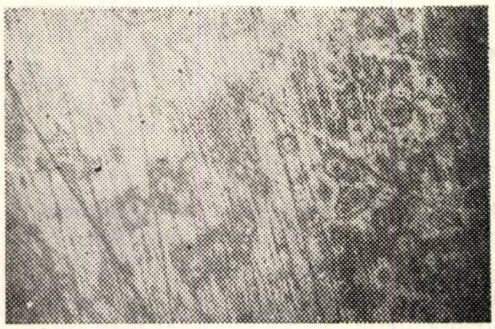


Fig. 1. Material nemagnetic cu suspensie feroferică. Nu se organizează în formă de domenii.

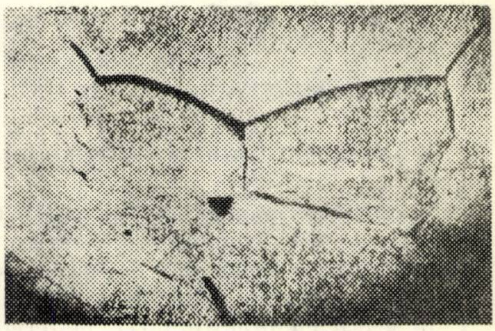


Fig. 2. Material magnetic cu suspensie feroferică. Suspensia trasează net conturul cristalitelor.

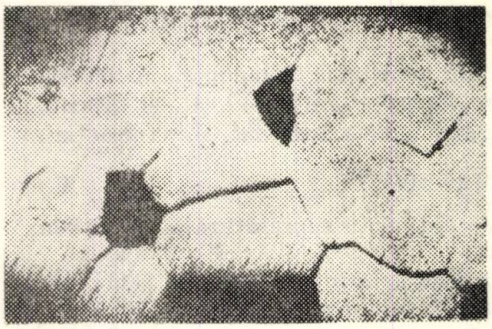


Fig. 3. Material magnetic cu suspensie feroferică. Se evidenţiază incluziunile nemagnetice.

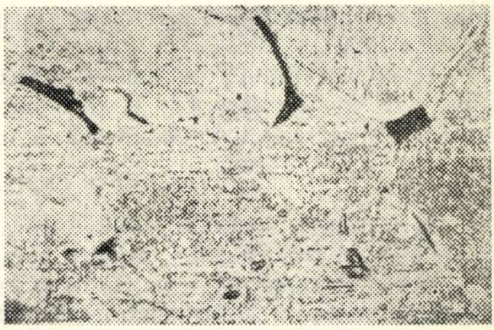


Fig. 4. Material magnetic cu suspensie feroferică. Se evidenţiază incluziunile nemagnetice.

Din forma lor regulată rezultă că au o structură cubică sau tetragonală, în acord cu literatura [1], proiecţia în plan a unei piramide teragonale, poate să apară cu cinci laturi şi a unui cub, cu şase laturi.

Analiza structurii arată că există domenii Weiss cu o orientare paralelă a domeniilor de 180°, extrem de ordonată (fig. 5). Este vorba despre carburile care precipită în interiorul acelor de ferită şi sînt paralele între ele.

Structura aceasta este tipică materialelor cu anizotropie uniaxială [4].

În cazul zgîrieturilor pe cristalit (seratch) se observă în (fig. 6) modificarea în distribuţia magnetizării, în felul celei din fig. 7, adică există domenii la 180° de închidere la 90° dar perpendiculare pe planul probei.

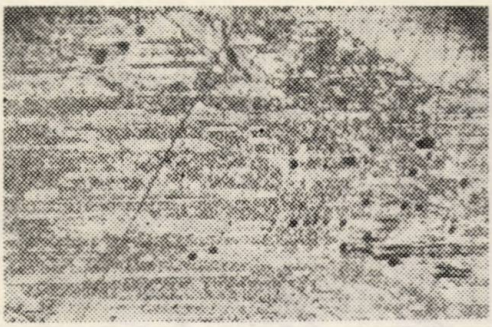


Fig. 5. Material magnetic cu suspensie feroferică. Apar domenii Weiss, cu orientare paralelă ordonată de 180°.

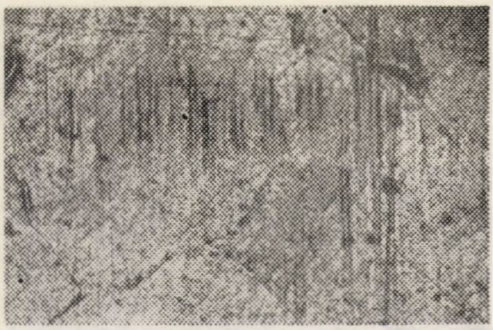


Fig. 6. Material magnetic cu suspensie feroferică. Se observă zgîrieturile pe cristalit (scratch).

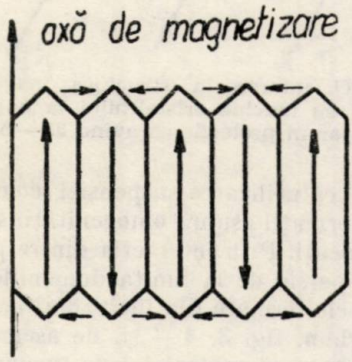


Fig. 7. Domenii de magnetizare la 180° și de închidere la 90°.

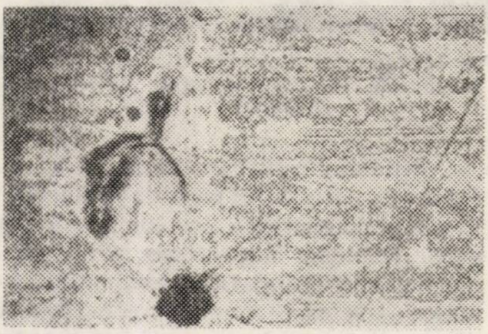


Fig. 8. Material magnetic cu suspensie feroferică. Apare un gol magnetic.

În (fig. 8) se observă distribuția magnetizării în jurul unui gol magnetic de forma celei schițate în fig. 9.

În (fig. 10) se observă grăunți (cristalite) pe care se găsește o zonă de trecere lată, unde apar structuri mărunte în labirint, în interior, iar la margini o zonă cu pereți în formă ordonată de felul celor care sînt pe zgîrieturile late (de tipul „cross-tie-wall" de la pelicule sau „sîrmă ghimpată").

De remarcat structurile paralele și fine (partea superioară a fig. 10) pe suprafață mare, a unui cristalit complet.

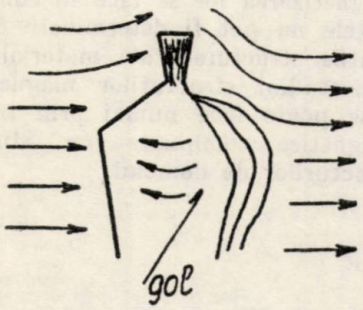


Fig. 9. Distribuția magnetizării în jurul unui gol magnetic.

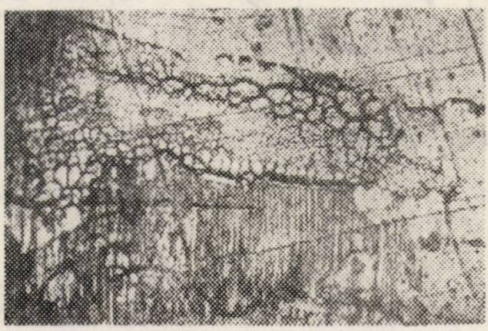


Fig. 10. Material magnetic cu suspensie feroferică. Apare o zonă de trecere lată cu structuri mărnute în labirint.

În (fig. 11) se observă că în raport cu muchia cristalitului, suspensia trasează net orientarea în structura magnetică (fig. 12), la unghiuri ce apar în proiecție ca avînd 35—45°. În realitate este o muchie pe care se formează pereți „sîrmă ghimpată" avînd orientarea magnetizării ca în (fig. 12).

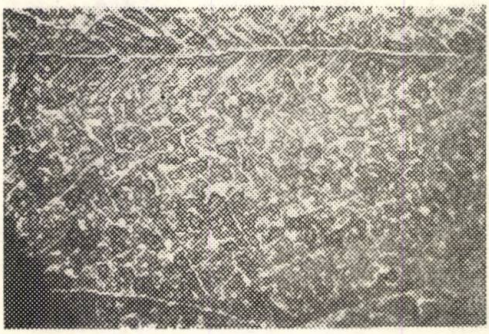


Fig. 11. Material magnetic cu suspensie feroferică. Se formează pereți „sîrmă ghimpată"

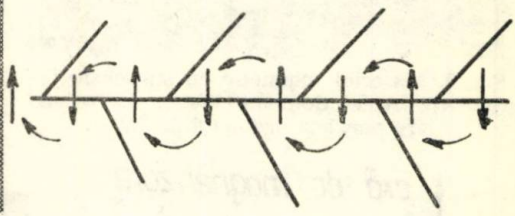


Fig. 12. Orientarea în structura magnetică în raport cu muchia cristalitului la unghiuri ce apar în proiecție ca avînd 35—45°.

Studiul efectuat a scos în evidență faptul că utilizarea suspensiei coloidale feroferice dată în [3] permite obținerea de informații asupra omogenității structurale și magnetice a acestor magneți permanenți. Prin interacția dintre particulele coloidale magnetizate și cîmpul de dispersie de la limita domeniilor de magnetizare spontană, se evidențiază net zonele formate din incluziuni nemagnetice — în cazul nostru precipitările de carbon, fig. 3, 4 — și, de asemenea, din studiul unui larg eșantion s-a putut constata că materialul de turnare nu a fost bine omogenizat, aspectul structurilor diferind de la un magnet la altul, din același lot.

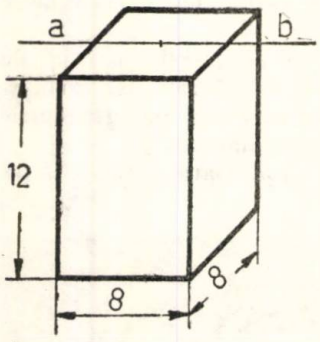


Fig. 13. Pastila magnetică studiată.

Pastilele studiate, de forma și dimensiunile geometrice date în (fig. 13) și care se încorporează în circuitul magnetic al instrumentelor de măsură, sînt magnetizate prin impulsuri după axa a—b.

În realitate, studiul pe lot a arătat că apar abateri foarte mari atît în direcția orientării cît și în valoarea inducției remanente, ultima fiind cuprinsă între 0,03 T—0,75 T.

Întrucît magnetizarea lor se face în condiții identice, diferențele nu pot fi determinate decît din neomogenitățile structurale ale materialului, evidențiate prin studiul structurilor magnetice. Corectarea lor se poate face numai prin tratamente termomagnetice combinate cu studiul sistematic al structurilor de domenii.

BIBLIOGRAFIE

1. Truşculescu M., Studiul metalelor, Ed. did. şi ped. Bucureşti, (1977), p. *158*
2. Bronner Ch., t ABEM, nr 378, Bull. Comm. nr. 6, 1971.
3. Gray R. J., Microstructural Science, *v. 1*, 1966.
4. Prutton M., Thin ferromagnetic films, Butterworths London, (1964), p. 58.

SUR LA STRUCTURE MAGNÉTIQUE DES AIMANTS PERMANENTS DE TYPE ALNICO 1500 OBTENUE PAR LA TECHNIQUE DE BITTER

RÉSUMÉ

On a étudié la structure de domains, par la technique de Bitter, des aimants permanents de type ALNICO 1500.

On a évidencié une manque d'homogeneiteé structurale du matériel ainssique les precipitations du charbon, ce qu'éxplique l'instabilité de ces aimants

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara

MATEMATICĂ—FIZICĂ

Tom. 27 (41) **Fascicola 1**

SPACE-FIELD THEORY

BY

M. BORNEAS

Received 14 IX 1981.

I. Introduction.

The problem of Space and Time has a basic importance in physics. Recently there have been made several proposals connected to the foundation of these concepts [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8].

The enlarged concept of Space defined by us in previous papers [4] [8] allowed to have a unified view of the physical phenomena, and to ensure a physical meaning to the action principle. It has been shown that the fundamental law of Nature

$$\delta\int_1^2 d\sigma=0, \tag{I.1}$$

where $d\sigma$ is the path element in Space I (the geometric primary existence GPE), can be set, in Space II (the frame space-time), in the form

$$\delta\int dx\mathcal{L}=0, \tag{I.2}$$

with the Lagrangian (we shall call it „Lagrangian" for simplicity)

$$\mathcal{L}=\int_{\rho}\sum_{\lambda\mu\eta\varepsilon\xi\zeta KLg\ldots h\ldots i\ldots j\ldots pq}\chi_\rho\left\{\left[\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial W_{\lambda\eta\,(K)g\ldots}}DW_{\lambda\eta\,(K)g\ldots}+\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\partial\Omega_1}{\partial x^p}dx^p+\frac{\partial\Omega_1}{\partial W_{\lambda\eta\,(K)g\ldots}}\Delta^{\xi h\ldots\{\lambda\}}_{[K]\eta g\ldots p}W_{\lambda\xi(K)h\ldots}dx^p\Big)\Big(\frac{\partial\Omega_2}{\partial W_{\mu\varepsilon\,(L)i\ldots}}DW_{\mu\varepsilon(L)i\ldots}+$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial\Omega_2}{\partial x^q}dx^q+\frac{\partial\Omega_2}{\partial W_{\mu\varepsilon(L)i\ldots}}\Delta^{\zeta j\ldots\{\mu\}}_{[L]\varepsilon i\ldots q}W_{\mu\zeta(L)j\ldots}dx^q\Big)\right]:\right\}_\rho\equiv$$

$$\equiv\int_{\rho}\sum_{\lambda\mu KLgq}\chi_\rho\left\{\left[\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial W_{\lambda\,(K)}}DW_{\lambda(K)}+\frac{\partial\Omega_1}{\partial x^q}dx^p+\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\partial\Omega_1}{\partial W_{\lambda\,(K)}}\Delta^{\{\lambda\}}_{p}W_{\lambda(K)}\,dx^p\Big)\Big(\frac{\partial\Omega_2}{\partial W_{\mu\,(L)}}DW_{\mu\,(L)}+\frac{\partial\Omega_2}{\partial x^q}dx^q+$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial\Omega_2}{\partial W_{\mu\,(L)}}\Delta^{\{\mu\}}_{q}W_{\lambda\,(L)}\,dx^q\Big)\right]:\right\}_\rho \tag{I.3}$$

where : η, ε, ξ, ζ are instead of all indices of the components of the magnitudes $\overline{\overline{W}}_\lambda$; the subscript $(K)\, i \ldots$ shows the K-th order covariant derivative with respect to x^i, x^j, ... (K, L begins from 0) ; Ω_φ are functionals depending in general on x^i, $\overline{\overline{W}}_\lambda$, and their derivatives ; D means absolute differential ; $\Delta^{\xi i \ldots}_{[K]\,\eta g \ldots p}$ are some coefficients determined only by the „passage" from one cross section in Space I to another [8] ; the inedx „:" means the (anti-) symmetrized form ; the operators χ_ρ satisfy the condition

$$\chi_\rho \chi_\tau + \chi_\tau \chi_\rho = 2\bar{\gamma}_{\rho\tau} e_\rho e_\tau \tag{I.4}$$

($\bar{\gamma}_{\tau\rho}$ are the transformation coefficients of the coordinates on the cross section in Space I ; e_ρ are operators relating the magnitudes of Space I and Space II [8]). The last expression in (I.3) is in compact notation.

Multiplying the parentheses in (I.3) one obtains the Lagrangian in the from

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_m \tag{I. 5}$$

where

$$\mathcal{L}_M = \int \sum_{\rho\lambda\mu KLpq} \chi_{\rho M} \Big[\Big(\frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda\,(K)}} DW_{\lambda\,(K)} \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\lambda\,(L)}} DW_{\mu\,(L)} +$$

$$+ \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda\,(K)}} DW_{\lambda(K)} \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^q} dx^q + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^p} dx^p \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu\,(L)}} DW_{\mu(L)} +$$

$$+ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^p} dx^p \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^q} dx^q \Big) : \Big]_\rho \tag{I.6}$$

and

$$\mathcal{L}_m = \int \sum_{\rho\lambda\mu KLpq} \chi_{\rho m} \Big[\Big(\frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda\,(K)}} DW_{\lambda\,(K)} \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu\,(L)}} \Delta^{\{\mu\}}_q W_{\mu\,(L)} dx^q +$$

$$+ \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda\,(L)}} \Delta^{\{\lambda\}}_p W_{\lambda\,(K)} dx^p \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu\,(L)}} DW_{\mu\,(L)} +$$

$$+ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^p} dx^p \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu(L)}} \Delta^{\{\mu\}}_q W_{\mu\,(L)}\, dx^q + \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda\,(K)}} \Delta^{\{\lambda\}}_p W_{\lambda\,(K)}\, dx^p \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^q} dx^q +$$

$$+ \frac{\partial \Omega^1}{\partial W_{\lambda\,(K)}} \Delta^{\{\lambda\}}_p W_{\lambda\,(K)}\, dx^p \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu\,(L)}} \Delta^{\{\mu\}}_q W_{\mu\,(L)}\, dx^q \Big) : \Big]_\rho . \tag{I.7}$$

One can see that, in view of the observations concerning the coefficients $\Delta^{\{\lambda\}}_p$, $\mathcal{L}_M$ must be utilized for the derivation of the equations describing the macroscopic phenomena, while $\mathcal{L}_m$ could lead to the equations for the microscopic phenomena.

II. Macroscopic fields.

II.1. *The general form of the Lagrangian.* Let us now examine the macroscopic fields, with the help of $\mathcal{L}_M$. We shall consider the „classic" case, i. e. the continuous aspect only.

In order to obtain equations which can be related to actual physical phenomena, one has to chose adequate approximations (Belinfante [9] says that

„all physical theories are approximations in which something – knowingly or unkowingly – is neglected"). Therefore we adopt the following assumptions:

(i) the fundamental metric tensor being a second rank tensor, in view of the background nonpreferentiality concept the magnitudes $\overline{\overline{W}}_\lambda$ should be tensors of the second rank at the msst, $W_{\lambda kl}$; (ii) $W_{\lambda kl}$ are „c-numbers"; (iii) $\mathcal{L}_M$ contains first order derivatives of $W_{\lambda ki}$ only; (iv) Ω_φ are independent explicitly of x. Moreover the functionals Ω_φ must be under some constraints which eliminate the nonphysical cases.

Under the above circumstances $\mathcal{L}_M$ from (I.6) reduces to

$$L_M = \int \sum_{\rho\lambda\mu klmn} X_{\rho M} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \; \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu mn}} \; DW_{\lambda kl} \; DW_{\mu m n} \right)_\rho \tag{II.1}$$

or, expliciting the absolute differentials, and multiplying and dividing by $(\mathrm{d}\omega)^2$, where ω is an arbitrary parameter in GPE,

$$\mathcal{L}_M = \int \sum_{\rho\lambda\mu klmnpqrs} \chi_{\rho M} \left\{ (\mathrm{d}\omega)^2 \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}\omega} \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}\omega} \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu mn}} \left[\frac{\partial W_{\lambda kl}}{\partial x^p} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \Gamma^r_{kp} W_{\lambda rl} - \Gamma^r_{lp} W_{\lambda kr} \right] \left[\frac{\partial W_{\mu mn}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{mq} W_{\mu s n} - \Gamma^s_{nq} W_{\mu m s} \right] \right\}_\rho \tag{II.2}$$

where Γ^r_{kp} is Christoffel's symbol.

By multiplication of the brackets the Lagrangian gets the form

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G \tag{II.3}$$

where

$$\mathcal{L}_E = \sum_{\rho\lambda\mu klmnpq} \chi_{\rho E} \left[Y^{pq} \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu mn}} \frac{\partial W_{\lambda kl}}{\partial x^p} \frac{\partial W_{\mu mn}}{\partial x^q} \right]_\rho \tag{II.4}$$

$$\mathcal{L}_F = \sum_{\rho\lambda\mu klmnpqrs} \chi_{\rho F} \left[\left(- Y^{pq} \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu mn}} \right) \left(\frac{\partial W_{\lambda kl}}{\partial x^p} W_{\mu s n} \Gamma^s_{mq} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial W_{\lambda kl}}{\partial x^p} W_{\mu m s} \Gamma^s_{nq} + W_{\lambda rl} \frac{\partial W_{\mu mn}}{\partial x^p} \Gamma^r_{kp} + W_{\lambda kr} \frac{\partial W_{\mu mn}}{\partial x^q} \Gamma^r_{lp} \right) \right]_\rho \tag{II.5}$$

$$\mathcal{L}_G = \sum_{\rho\lambda\mu klmnpqrs} \chi_{\rho G} \left[Y^{pq} \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu mn}} (W_{\lambda rl} W_{\mu s n} \Gamma^r_{kp} \Gamma^s_{mq} + \right.$$

$$\left. + W_{\lambda rl} W_{\mu m s} \Gamma^r_{kp} \Gamma^s_{nq} + W_{\lambda rl} W_{\mu s n} \Gamma^r_{lp} \Gamma^s_{mq} + W_{\lambda kr} W_{\mu m s} \Gamma^r_{lp} \Gamma^s_{nq}) \right]_\rho \tag{II.6}$$

with the short-hand notation

$$Y^{pq} = Y^{qp} = \int (\mathrm{d}\omega)^2 \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}\omega} \frac{\mathrm{d}x^q}{\mathrm{d}\omega} \,. \tag{II.7}$$

II.2. *Developed form of* $\mathcal{L}_G$. One can see that $\mathcal{L}_G$ contains products of Christoffel's symbol, as the curvature tensors R_{kmqp}, R^n_{mqp}, R_{qp}, or the scalar curvature R do, consequently $\mathcal{L}_G$ is related to the character of spacetime at macroscopic scale.

With the notations

$$\begin{cases} G'(kmpqrs) = \sum\limits_{\rho\lambda\mu ln} \chi'_{\rho G} \left(Y^{pq} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu mn}} W_{\lambda rl} W_{\mu sn} \right)_\rho \\ G''(knpqrs) = \sum\limits_{\rho\lambda\mu lm} \chi''_{\rho G} \left(Y^{pq} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu mn}} W_{\lambda rl} W_{\mu ms} \right)_\rho \\ G'''(lmpqrs) = \sum\limits_{\rho\lambda\mu kn} \chi^m_{\rho G} \left(Y^{pq} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu me}} W_{\lambda kr} W_{\mu sn} \right)_\rho \\ G'^V(lnpqrs) = \sum\limits_{\rho\lambda\mu km} \chi'^V_{\rho G} \left(Y^{pq} \dfrac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}} \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu mn}} W_{\lambda ir} W_{\mu ms} \right)_\rho \end{cases} \tag{II.8}$$

one can write

$$\mathcal{L}_G = \sum_{klmnpbrs} [G'(kmpqrs)\,\Gamma^r_{kp}\Gamma^s_{mq} + G''(knpqrs)\Gamma^r_{kp}\Gamma^s_{nq} +$$

$$+ G'''(lmpqrs)\,\Gamma^r_{lp}\Gamma^s_{mq} + G'^V(lnpqrs)\,\Gamma^r_{lp}\Gamma^s_{eq}]. \tag{II.9}$$

In order to have a physical meaning for $\mathcal{L}_G$ one must look for a combination of the products $\Gamma^r_{kp}\,\Gamma^s_{mq}$ which should enter the expression of one of the tensors mentioned above. This can be reached by a constraint on the G', G'', G''', and G'^V magnitudes, depending on Ω , – as it has been previously emphasized. In fact, if

$$G''(mkpqrs) + G'''(mkpqrs) = -G'(kmpqrs) -$$

$$- G'^V(kmpqrs) = -G^\circ(kmpqrs) \tag{II.10}$$

(the explicit form ot the Ω_φ-s are here irrelevant), and changing some indices in (II.9), we can write

$$\mathcal{L}_G = \sum_{kmpqrs} G^\circ(kmpqrs)\,(\Gamma^r_{kp}\Gamma^s_{mq} - \Gamma^r_{mp}\Gamma^s_{kq}). \tag{II.11}$$

Bearing in mind the expression of the scalar curvature R, and putting

$$G^\circ(kmpqrs) = \bar{G}\, g^{kp} g^{mq} g_{rs}, \tag{II.12}$$

we obtain

$$\mathcal{L}_G = (\bar{G}R - \mathcal{D}) \tag{II.13}$$

where

$$\mathcal{D} = \sum_{kmpq} \frac{1}{2} G g^{kp} g^{mq} \left(\frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^q \partial x^m} + \frac{\partial^2 g_{qm}}{\partial x^p \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{pm}}{\partial x^q \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^p \partial x^m} \right). \tag{II.14}$$

Let us write the variation with respect to g^{ij} of the action $\int dx\, \mathcal{L}_G$

$$\delta_g \int dx \sum_{kmpqrs} G^\circ(kmpqrs)\,(\Gamma^r_{kp}\Gamma^s_{mq} - \Gamma^r_{mp}\Gamma^s_{kq}) =$$

$$= \delta_g \int dx\, \bar{G}\, R - \delta_g \int dx\, \mathcal{D}. \tag{II.15}$$

It is obvious that making

$$\bar{G}=g^{1/2} \tag{II.16}$$

the first integral on the right hand side of (II.15) is a scalar, and the second integral is not. But it is well known [10] that

$$\delta_g \int \mathrm{d}x\, g^{1/2}R=\delta_g \int \mathrm{d}x g^{1/2} \sum_{kpqr} g^{kq}\,(\Gamma^r_{pk}\Gamma^s_{qr}-\Gamma^r_{pr}\Gamma^s_{qk}). \tag{II.17}$$

Comparing (II.15) with (II.17) one can see that we can get rid of the „bad" term if

$$G^{\circ}\,(kmpqrs)=G\,(kmpqrs)\,\delta_{mr}\delta_{sp}=G\,(kpqr), \tag{II.18}$$

and assuming that G is independent of the indices p and r; then, with

$$G\,(k\,[p]\,q\,[r])=G\,(kq)=g^{1/2}\,g^{kq} \tag{II.19}$$

(implying the commutativity of the $\chi_{\rho\sigma}$ operators), the equation (I.2) for $\mathcal{L}_G$, leads to

$$\delta_g \int \mathrm{d}x \mathcal{L}_G=0 \tag{II.20}$$

with

$$\mathcal{L}_G=g^{1/2} \sum_{kpqr} g^{kq}\,(\Gamma^r_{kp}\Gamma^s_{rq}-\Gamma^r_{rp}\Gamma^s_{kq}). \tag{II.21}$$

The Euler-Lagrange equation resulting from (II.20) and (II.21) turns out to be Einstein's equation for the gravitational field, without the matter-energy tensor [10].

II.3 *Developed form of* $\mathcal{L}_F$. Because $\mathcal{L}_G$ has been related to the Einsteinian gravitational field, we assume that $\mathcal{L}_F$, which also contains the Christoffel's symbols, has to be related to a second gravitational field; the presence of this second gravitational field is thus compulsory, and needs not to be introduced by supplementary hypothesis, as in other analogous theories of gravitation.

Making in (II.5) the notations

$$\begin{cases} F'\,(mqs)=-\sum\limits_{\rho\lambda\mu klnp} \chi'_{F\rho}\left(Y^{pq}\,\dfrac{\partial\Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}}\,\dfrac{\partial\Omega_2}{\partial W_{\mu mn}}\,\dfrac{\partial W_{\lambda kl}}{\partial x^p}\,W_{\mu sn}\right)_\rho \\ F''\,(nqs)=-\sum\limits_{\rho\lambda\mu klmp} \chi''_{\rho F}\left(Y^{pq}\,\dfrac{\partial\Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}}\,\dfrac{\partial\Omega_2}{\partial W_{\mu mn}}\,\dfrac{\partial W_{\lambda kl}}{\partial x^p}\,W_{\mu ms}\right)_\rho \\ F'''\,(kpr)=-\sum\limits_{\rho\lambda l\mu mnq} \chi'''_{\rho F}\left(Y^{pq}\,\dfrac{\partial\Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}}\,\dfrac{\partial\Omega_2}{\partial W_{\mu mn}}\,W_{\lambda rl}\,\dfrac{\partial W_{\mu mn}}{\partial x^q}\right)_\rho \\ F'^{V}\,(lpr)=-\sum\limits_{\rho\lambda\mu kmnq} \chi'^{V}_{\rho F}\left(Y^{pq}\,\dfrac{\partial\Omega_1}{\partial W_{\lambda kl}}\,\dfrac{\partial\Omega_2}{\partial W_{\mu mn}}\,W_{\lambda kr}\,\dfrac{\partial W_{\mu mn}}{\partial x^q}\right)_\rho \end{cases} \tag{II.22}$$

we get

$$\mathcal{L}_F=\sum_{klmnpqrs}[F'\,(mqs)\Gamma^s_{mq}+F''\,(nqs)\,\Gamma^s_{nq}+F'''\,(kpr)\,\Gamma^r_{kp}+$$

$$+F'^{V}\,(lpr)\,\Gamma^r_{lp}], \tag{II.23}$$

and with some changes if indices

$$\mathcal{L}_F = \sum_{mqs} F\,(mqs)\,\Gamma^s_{mq} \tag{II.24}$$

where

$$F\,(mqs) = F'\,(mqs) + F''\,(mqs) + F'''\,(mqs) + F'^V\,(mqs). \tag{II.25}$$

For background nonpreferentiality reasons we presume that F, in analogy with G, also reduces to a two-indices magnitude, and $\mathcal{L}_F$ becomes

$$\mathcal{L}_F = \sum_{rs} F\,(rs)\,\Gamma^r_{sr} \tag{II.26}$$

(the operators χ_{pF} too commute with one another).

The explicit form of $F\,(rs)$, and the equations of gravitation, have been discussed in another paper [11].

II.4. *The Lagrangian for the electromagnetic field.* The second known macroscopic field is the electromagnetic field. If we try to reformulate Maxwell's equations within the present model, then from (II.4), and bearing in mind the discussion on $\mathcal{L}_F$ and $\mathcal{L}_G$, one can see that the Lagrangian for the free electromagnetic field must be a part of $\mathcal{L}_E$. In order to relate it to the electromagnetic field, let us denote by $W^{em}_{\lambda kl}$ the tensors connected to the description of the electromagnetic field. Then, Ω_φ can be set into the form

$$\Omega_\varphi = \Omega^{em}_\lambda\,(W^{em}_{\lambda kl}) + \Omega^{\circ}_\varphi\,(W_{\mu m n}). \tag{II.27}$$

Thus $\mathcal{L}_E$ can be written

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}^{em}_E\,(W^{em}_{\lambda kl},\ \partial W^{em}_{\mu mn}/\partial x^p) + \breve{\mathcal{L}}_E \tag{II.28}$$

where $\breve{\mathcal{L}}_E$ contains the $W^{em}_{\lambda kl}$ magnitudes only in combinations with other magnitudes (i.e. the electromagnetic field in interaction with other fields). Consequently, for the equations of the free electromagnetic field we make use of $\mathcal{L}^{em}_E$ solely.

Bearing in mind (II.4) and (II.27) we can write

$$\mathcal{L}^{em}_E = \sum_{\rho\lambda\mu klmnpq} \chi^{em}_\rho \left(Y^{pq}\,\frac{\partial\Omega_1}{\partial W^{em}_{\lambda kl}}\,\frac{\partial\Omega_2}{\partial W^{em}_{\mu mn}}\,\frac{\partial W^{em}_{\lambda kl}}{\partial x^p}\,\frac{\partial W^{em}_{\mu mn}}{\partial x^q} \right). \tag{II.29}$$

Lacking the selfinteraction, the functionals Ω^{em}_φ are linear in $W^{em}_{\lambda kl}$, i.e. of the form

$$\Omega^{em}_\varphi = \sum_{\nu rs} a^{\nu rs}_\varphi\ W^{em}_{\nu rs} = \sum_{\nu rs} a^{\nu rs}\ W^{em}_{\nu rs} \tag{II.30}$$

and the Lagrangian (II.29) reads

$$\mathcal{L}^{em}_E = \sum_{\nu\lambda\mu klmnpb} \chi^{em}_\rho \left(Y^{pq}\ a^{\lambda kl}\ a^{\mu mn}\,\frac{\partial W^{em}_{\lambda kl}}{\partial x^p}\,\frac{\partial W^{em}_{\mu mn}}{\partial x^q} \right)_\rho . \tag{II.31}$$

Now, the combinations of the $W^{em}_{\lambda kl}$-s wich produce magnitudes characterizing the electromagnetic field have to result as four-vectors, on experimental ground [10]. This can be reached by setting

$$a^{\nu rs} = a^s_0 a^{\nu r}_W, \tag{II.32}$$

and

$$A_i = \sum_{\lambda k} a_W^{\lambda k} \; W_{\lambda kl}^{em} \tag{II.33}$$

Finally, assuming the orthogonality of a_0^l and $dx^p/d\omega$, i.e.

$$\sum_{\rho} \chi_{\rho}^{em} \; (Y^{pq} a_0^l a_0^n) = -\frac{1}{2\mu_0^2} \delta^{pq} \delta^{ln}, \tag{II.34}$$

(II.31) represents the Lagrangian leading to the equation of the potential for the free electromagnetic field, (II.33) being the electromagnetic potential.

III. Microscopic fields.

III.1. *General form of the Lagrangian.* Now we shall look for some possible connections between the present model and the microsopic fields. It has been shown that the equations for the microscopic phenomena could be deduced from the action principle by the utilization of the Lagrangian (I.7). In this Lagrangian the omission of the higher derivatives of $\overline{\overline{W}}_\lambda$ cannot be maintained in general, only in some particular cases, owing to the „mobility" of the considered cross section in GPE. If we denote by $\overline{\overline{W}}_\lambda^\Delta$ the magnitudes which serve to the determination of the „non-classic" microscopic fields, and by $\overline{\overline{W}}_\mu^R$ the other magnitudes, we can write the Lagrangian in compact form

$$\mathcal{L}_m = \int \sum_{\rho\lambda\mu pqkl} X_{pm} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\mu(k)}^\Delta} \; DW_{\lambda(k)}^\Delta + \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda(k)}^R} \; DW_{\lambda(k)}^R \right) \times \right.\right.$$

$$\times \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu(L)}^\Delta} \Delta_q^{\{\mu\}} \; W_{\mu(L)}^\Delta dx^q + \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu(L)}^R} \Delta_q^{\{\mu\}} \; W_{\mu(L)}^R \, dx^q \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda(R)}^\Delta} \Delta_p^{\{\lambda\}} \; W_{\lambda(k)}^\Delta \, dx^p + \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda(k)}^R} \Delta_p^{\{\lambda\}} \; W_{\lambda(k)}^R \, dx^p \right) \left(\frac{\partial \Omega^2}{\partial W_{\mu(L)}^\Delta} DW_{\mu(L)}^\Delta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu(L)}^R} \; DW_{\mu(L)}^R \right) + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^p} dx^p \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu(L)}^\Delta} \Delta_q^{\{\mu\}} \; W_{\mu(L)}^\Delta \, dx^q + \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu(L)}^R} \Delta_q^{\{\mu\}} \; W_{\mu(L)}^R \, dx^q \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda(k)}^\Delta} \Delta_p^{\{\lambda\}} \; W_{\lambda(k)}^\Delta \, dx^p + \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda(k)}^R} \Delta_p^{\{\lambda\}} \; W_{\lambda(k)}^R \, dx^p \right) \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^q} dx^q +$$

$$+ \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda(k)}^\Delta} \Delta_p^{\{\lambda\}} \; W_{\lambda(k)}^\Delta \, dx^p + \frac{\partial \Omega_1}{\partial W_{\lambda(k)}^R} \Delta_p^{\{\lambda\}} \; W_{\lambda(k)}^R \, dx^p \right) \times$$

$$\left. \left. \times \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu(L)}^\Delta} \Delta_q^{\{\mu\}} \; W_{\mu(L)}^\Delta \, dx^q + \frac{\partial \Omega_2}{\partial W_{\mu(L)}^R} \Delta_q^{\{\mu\}} \; W_{\mu(L)}^R \, dx^q \right) \right] \right\}_\rho . \tag{III.1}$$

Furthermore, the functionals Ω_φ must also have nonlinear terms in $W_{\lambda(k)}^\Delta$, but in such a form that the linear approximation be possible. Denotig by Ω_φ^Δ

the part of Ω_φ which depends on $W^\Delta_{\lambda(k)}$ only, we can write in the same compact form

$$\Omega^\Delta_\varphi = \sum_{\lambda K} c^\lambda_{\varphi K} W^\Delta_{\lambda(K)} + \sum_{\lambda\mu KL} d^{\lambda\mu}_{\varphi KL}\, W^\Delta_{\lambda(K)}\, W^\Delta_{\mu(L)} \tag{III.2}$$

with $\lambda \neq \mu$ in the pairs $W^\Delta_{\lambda(K)}\, W^\Delta_{\mu(L)}$.

If we consider the free microscopic fields, the Riemannian character of space-time has to be removed, and the corresponding Lagrangian gets the form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Delta = \int_\rho \sum_{\lambda\mu pqKL} \chi^\Delta_\rho \Bigg[\Bigg(& \frac{\partial \Omega_1}{\partial W^\Delta_{\lambda(K)}}\, \partial_p^{K+1} W^{\mathrm{E}}_\lambda \, \mathrm{d}x^p \, \frac{\partial \Omega_2}{\partial W^\Delta_{\mu(L)}}\, \Delta^{\{\mu\}}_q \partial^L W^\Delta_\mu \, \mathrm{d}x^q + \\ & + \frac{\partial \Omega_1}{\partial W^\Delta_{\lambda(K)}}\, \Delta^{\{\lambda\}}_p \partial^K W^\Delta_\lambda \, \mathrm{d}x^p \, \frac{\partial \Omega_2}{\partial W^\Delta_{\mu(L)}}\, \partial_q^{L+1} W^\Delta_\mu \, \mathrm{d}x^q + \\ & + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^p}\, \mathrm{d}x^p \, \frac{\partial \Omega_2}{\partial W^\Delta_{\mu(L)}}\, \Delta^{\{\mu\}}_q \partial^L W^\Delta_\mu \, \mathrm{d}x^q + \frac{\partial \Omega_1}{\partial W^\Delta_{\mu(K)}}\, \Delta^{\{\lambda\}}_p \partial^K W^\Delta_\lambda \, \mathrm{d}x^p \, \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^q}\, \mathrm{d}x^q + \\ & + \frac{\partial \Omega_1}{\partial W^\Delta_{\lambda(K)}}\, \Delta^{\{\lambda\}}_p \partial^K W^\Delta_\lambda \, \mathrm{d}x^p \, \frac{\partial \Omega_2}{\partial W^\Delta_{\mu(L)}}\, \Delta^{\{\mu\}}_q \partial^L W^\Delta_\mu \, \mathrm{d}x^q \Bigg) \Bigg] \Bigg|_\rho \end{aligned} \tag{III.3}$$

($W^\Delta_{\lambda(K)}$ is reduced here to simple partial derivative; the symbol ∂_p^{K+1} shows that the $(K+1)$-th derivative is with respect to x^p). The reduction of (III.1) to (III.3) is valid for both tensores ans spinors [12] [13] [14] [15].

In view of (III.2) the Lagrangian $\mathcal{L}_\Delta$ may ve written

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Delta = \int_\rho \sum_{\lambda\mu pqKL} \chi^\Delta_\rho \Bigg\{ \Bigg[\Bigg(& c^\lambda_{1K} + \sum_{\nu M} \bar{d}^{\lambda\nu}_{1KM}\, \partial^M W^\Delta_\nu \Bigg) \partial_p^{K+1}\, W^\Delta_\lambda \, \mathrm{d}x^p \times \\ & \times \Bigg(c^\mu_{2L} + \sum_{\pi N} \bar{d}^{\mu\pi}_{2LN}\, \partial^N W^\Delta_\pi \Bigg) \Delta^{\{\mu\}}_q\, \partial^L W^\Delta_\mu \, \mathrm{d}x^q + \\ & + \Bigg(c^\lambda_{1K} + \sum_{\nu M} \bar{d}^{\lambda\nu}_{1KM}\, \partial^M W^\Delta_\nu \Bigg) \Delta^{\{\lambda\}}_p\, \partial^K W^\Delta_\lambda \, \mathrm{d}x^p \Bigg(c^\mu_{2L} + \sum_{\pi N} \bar{d}^{\mu\pi}_{2LN}\, \partial^N W^\Delta_\pi \Bigg) \partial_q^{L+1}\, W^\Delta_\mu \, \mathrm{d}x^p + \\ & + \frac{\partial \Omega^\Delta_1}{\partial x^p}\, \mathrm{d}x^p \Bigg(c^\mu_{2L} + \sum_{\pi N} \bar{d}^{\mu\pi}_{2LN}\, \partial^N W^\Delta_\pi \Bigg) \Delta^{\{\mu\}}_q\, \partial^L W^\Delta_\mu \, \mathrm{d}x^q + \\ & + \Bigg(c^\lambda_{1K} + \sum_{\nu M} \bar{d}^{\lambda\nu}_{1KM} \partial^M W^\Delta_\lambda \Bigg) \Delta^{\{\lambda\{}_p\, \partial^K W^\Delta_\lambda \, \mathrm{d}x^p \, \frac{\partial \Omega^\Delta_2}{\partial x^q}\, \mathrm{d}x^q + \\ & + \Bigg(c^\lambda_{1K} + \sum_{\nu M} \bar{d}^{\lambda\nu}_{1KM}\, \partial^M W^\Delta_\nu \Bigg) \Delta^{\{\lambda\}}_p\, \partial^K W^\Delta_\lambda \, \mathrm{d}x^p \times \\ & \times \Bigg(c^\mu_{2L} + \sum_{\pi N} \bar{d}^{\mu\pi}_{2LN}\, \partial^N W^\Delta_\pi \Bigg) \Delta^{\{\mu\}}_q \partial^L W^\Delta_\mu \, \mathrm{d}x^q \Bigg] \Bigg| \Bigg\}_\rho \end{aligned} \tag{III.4}$$

with the notatio

$$\bar{d}^{\lambda\nu}_{\varphi KM} = d^{\lambda\nu}_{\varphi KM} + d^{\nu\lambda}_{\varphi MK}. \tag{III.5}$$

If $\Omega^{\Delta}_{\varphi}$ are independent explicitly of x^i, and the orthogonality condition

$$c^{\lambda}_{\varphi K} \bar{d}^{\mu\nu}_{\varphi LM} \sim \delta_{cd} \tag{III.6}$$

is fulfilled, then the Lagrangian gets the form

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Delta} = \sum_{\rho\lambda\mu\nu\pi pqKLMN} \{ & \vec{\mathcal{H}}^{\lambda\mu p}_{\rho KL} [(\partial^{K+1}_{p} W^{\Delta}_{\lambda})(\partial^{L} W^{\Delta}_{\mu})]_{\rho} + \\
& + \overleftarrow{\mathcal{H}}^{\lambda\mu q}_{\rho KL} [(\partial^{K} W^{\Delta}_{\lambda})(\partial^{L+1}_{q} W^{\Delta}_{\mu})]_{\rho} + \mathcal{H}^{\lambda\mu}_{\rho KL} [(\partial^{K} W^{\Delta}_{\lambda})(\partial^{L} W^{\Delta}_{\mu})]_{\rho} + \\
& + \vec{\mathcal{Z}}^{\lambda\nu\mu\pi p}_{\rho KMLN} [(\partial^{M} W^{\Delta}_{\nu})(\partial^{K+1}_{p} W^{\Delta}_{\lambda})(\partial^{N} W^{\Delta}_{\pi})(\partial^{L} W^{\Delta}_{\mu})]_{\rho} + \\
& + \vec{\mathcal{Z}}^{\lambda\nu\mu\pi q}_{\rho KMLN} [(\partial^{M} W^{\Delta}_{\nu})(\partial^{K} W^{\Delta}_{\lambda})(\partial^{N} W^{\Delta}_{\pi})(\partial^{L+1}_{q} W^{\Delta}_{\mu})[_{\rho} + \\
& + \mathcal{Z}^{\lambda\nu\mu\pi}_{\rho KMLN} [(\partial^{M} W^{\Delta}_{\nu})(\partial^{K} W^{\Delta}_{\lambda})(\partial^{N} W^{\Delta}_{\pi})(\partial^{L} W^{\Delta}_{\mu})]_{\rho} \}.
\end{aligned} \tag{III.7}$$

with the short-hand notations :

$$\left\{
\begin{aligned}
\vec{\mathcal{H}}^{\lambda\mu p}_{\rho KL} &= \sum_{q} \vec{\chi}^{\mathcal{H}}_{\rho} \left(\int (\mathrm{d}w)^2 \frac{dx^p}{g\rho} \frac{dx^q}{d\omega} c^{\lambda}_{1K} \tilde{c}^{\mu}_{2L} \Delta^{\{\mu\}}_{q} \right)_{\rho} \\
\overleftarrow{\mathcal{H}}^{\lambda\mu q}_{\rho KL} &= \sum_{p} \overleftarrow{\chi}^{\mathcal{H}}_{\rho} \left(\int (\mathrm{d}\omega)^2 \frac{px^p}{d\omega} \frac{dx^q}{d\rho} c^{\lambda}_{1K} \tilde{c}^{\mu}_{2L} \Delta^{\{\lambda\}}_{p} \right)_{\rho} \\
\mathcal{H}^{\lambda\mu}_{\rho KL} &= \sum_{pq} \chi^{\mathcal{H}}_{\rho} \left(\int (\mathrm{d}\omega)^2 \frac{dx^p}{d\omega} \frac{dx^q}{d\omega} c^{\lambda}_{1K} \tilde{c}^{\mu}_{2L} \Delta^{\{\lambda\}}_{p} \Delta^{\{\mu\}}_{q} \right)_{\rho} \\
\vec{\mathcal{Z}}^{\lambda\nu\mu\pi p}_{\rho KMLN} &= \sum_{q} \vec{\chi}^{\mathcal{Z}}_{\rho} \left(\int (\mathrm{d}\omega)^2 \frac{dx^p}{d\omega} \frac{dx^q}{d\omega} \bar{d}^{\lambda\nu}_{1KM} \tilde{\bar{d}}^{\mu\pi}_{2LN} \Delta^{\{\mu\}}_{q} \right)_{\rho} \\
\overleftarrow{\mathcal{Z}}^{\lambda\nu\mu\pi q}_{\rho KMLN} &= \sum_{p} \overleftarrow{\chi}^{\mathcal{Z}}_{\rho} \left(\int (\mathrm{d}\omega)^2 \frac{dx^p}{d\omega} \frac{dx^q}{d\omega} \bar{d}^{\lambda\nu}_{1KM} \tilde{\bar{d}}^{\mu\pi}_{2LN} \Delta^{\{\mu\}}_{p} \right)_{\rho} \\
\mathcal{Z}^{\lambda\nu\mu\pi}_{\rho KMLN} &= \sum_{pq} \chi^{\mathcal{Z}}_{\rho} \left(\int (\mathrm{d}\omega)^2 \frac{dx^p}{d\omega} \frac{dx^q}{d\omega} \bar{d}^{\lambda\nu}_{1KM} \tilde{\bar{d}}^{\mu\pi}_{2LN} \Delta^{\{\lambda\}}_{p} \Delta^{\{\mu\}}_{q} \right)_{\rho}
\end{aligned}
\right. \tag{III.8}$$

($\sim$ indicates other components).

III.2. *Calculations for* K, L, M, $N=0$. Although, as we have pointed out, the higher derivatives cannot be omitted in general, if the frequency of the microscopic field is very low, the case with K, L, M, $N=0$ may be taken into consideration as preliminary investigation. Therefore we shall survey the simplest possible model : the $\overline{W}^{\Delta}_{\lambda}$ magnitudes reduce to one field $W^{\Delta}_{1}=V$, and its

conjugate $W_2^{\Delta}=V^*$, with the components „c-numbers". Thus (III.7) reduces, in compact notation, to

$$\mathcal{L}_{\Delta}^{\circ}=\sum_{\rho p}\{\overline{\mathcal{H}}_{\rho}^{1p}[(\partial_p V)\,V^*]_{\rho}+\overline{\mathcal{H}}_{\rho}^{2p}[(\partial_p V^*)\,V]_{\rho}$$
$$\mathcal{H}_{\rho}[VV^*]_{\rho}+\overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{1p}[(\partial_p V)\,VV^*V^*]_{\rho}$$
$$+\overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{2p}[(\partial_p V^*)\,VVV^*]_p$$
$$\mathcal{A}_{\rho}[VVV^*V^*]_{\rho}\} \tag{III.9}$$

where

$$\begin{cases}\overline{\mathcal{H}}_{\rho}^{1p}=\vec{\mathcal{H}}_{\rho 00}^{12p}+\overleftarrow{\mathcal{H}}_{\rho 00}^{21p}\\ \overline{\mathcal{H}}_{\rho}^{2p}=\vec{\mathcal{H}}_{\rho 00}^{21p}+\overleftarrow{\mathcal{H}}_{\rho 00}^{12p}\\ \mathcal{H}_{\rho}=\mathcal{H}_{\rho 00}^{12}+\mathcal{H}_{\rho 00}^{21}\end{cases} \tag{III.10}$$

$$\begin{cases}\overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{1p}=\vec{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{1122p}+\vec{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{1211p}+\vec{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{1212p}+\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{2112p}+\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{1212p}+\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{2211p}\\ \overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{2p}=\vec{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{2121g}+\vec{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{2112p}+\vec{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{2211p}+\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{1122p}+\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{2121p}+\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{1221p}\\ \mathcal{A}_{\rho}=\mathcal{A}_{\rho 0000}^{1122}+\mathcal{A}_{\rho 0000}^{1212}+\mathcal{A}_{\rho 0000}^{1221}+\mathcal{A}_{\rho 0000}^{2112}+\mathcal{A}_{\rho 0000}^{2121}+\mathcal{A}_{\rho 0000}^{2211}\end{cases}$$

and $\vec{\mathcal{H}}_{\rho 00}^{12p}$, $\overleftarrow{\mathcal{H}}_{\rho 00}^{21p}$, $\vec{\mathcal{H}}_{\rho 00}^{21p}$, $\overleftarrow{\mathcal{H}}_{\rho 00}^{12p}$, $\mathcal{H}_{\rho 00}^{12}$, $\mathcal{H}_{\rho 00}^{21}$, $\vec{\mathcal{A}}_{\rho 0000}^{1122p}$, etc. are given by (III.8) with specific values of K, L, M, N.

The functional drivative with respect to V^* of the Lagrangian (III.9) leads to the Euler-Lagrange equations

$$\sum_{\rho r}\{\overline{\mathcal{H}}_{\rho}^{r}[\partial_r V]_{\rho}+\mathcal{H}_{\rho}[V]_{\rho}+\overline{\mathcal{A}}_{\rho+}^{r}[(\partial_1 V)\,VV^*]_{\rho}$$
$$+\overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{r}[(\partial_r V^*)\,VV]_{\rho}+\mathcal{A}_{\rho+}[VVV^*]_{\rho}\}=0 \tag{III.11}$$

where

$$\begin{cases}\overline{\mathcal{H}}_{\rho}^{r}=\overline{\mathcal{H}}_{\rho}^{1r}-\overline{\mathcal{H}}_{\rho}^{2r}\\ \overline{\mathcal{A}}_{\rho+}^{r}=\overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{1r}+\tilde{\overline{\mathcal{A}}}_{\rho}^{1r}-\overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{2r}-\tilde{\overline{\mathcal{A}}}_{\rho}^{2r}\\ \overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{r}=\overline{\mathcal{A}}_{\rho}^{2r}-\tilde{\overline{\mathcal{A}}}_{\rho}^{2r}\\ \mathcal{A}_{\rho+}=\mathcal{A}_{\rho}+\tilde{\mathcal{A}}_{\rho}.\end{cases} \tag{III.12}$$

Let us analyse the coefficients of the equation (III.11). We know that four of the dimensions of the cross section in GPE constitute in first approximation a Euclidian „subspace". Because no gravitational interactions are considered here, we may assume that this approximation holds, and then the condition (I.4) can be separated for this Euclidian „subspace".

$$\chi_s^{\Delta}\chi_t^{\Delta}+\chi_t^{\Delta}\chi_s^{\Delta}=2\bar{\gamma}_{st}e_se_t=2\delta_{st}e_se_t \tag{III.13}$$

where s, $t=1, 2, 3, 4$. Comparing (III.13) with the conditions fulfilled by the Dirac matrices

$$\gamma_s\gamma_t+\gamma_t\gamma_s=2\delta_{st} \tag{III.14}$$

it is obvious that one can set

$$\chi_s^{\Delta}=\gamma_s e_s. \tag{III.15}$$

Separating the operators

$$\sum_{\rho}\chi_{\rho}^{\Delta}=\sum_{s}\chi_{s}^{\Delta}+\sum_{\sigma}\chi_{\sigma}^{\Delta}=\sum_{s}\gamma_s e_s+\sum_{\sigma}\chi_{\sigma}^{\Delta} \tag{III.16}$$

(where $\sigma=1,2$ are the rest of the ρ subscripts), the equation (III.11) gets the form

$$\begin{aligned}\sum_{s\sigma r}\{&\gamma_s\overline{H}_s^r[\partial_r V]_s+\gamma_s H_s\,[V]_s+\gamma_s\bar{I}_{s+}^r+[(\partial_r V)\,VV^*]_s+\chi_\sigma\bar{I}_{\sigma+}^r\,[(\partial_r V)\,VV^*]_\sigma+\\&+\gamma_s\bar{I}_s^r\,[(\partial_r V^*)\,VV]_s+\chi_\sigma\bar{I}_\sigma^r\,[(\partial_r V^*)\,VV]_\sigma+\\&+\gamma_s I_s\,[VVV^*]_s+\chi_\sigma I\,[{}_\sigma VVV^*]_\sigma\}=0\,;\end{aligned} \tag{III.17}$$

$\overline{H}_s^r$, H_s, $\bar{I}_{s+}^r$, $\bar{I}_{\sigma+}^r$, $\bar{I}_s^r$, $\bar{I}_\sigma^r$, I_s, I_σ are built with the parentheses in (III.8) associated with the operators e_ρ. Lacking any special compulsory factor, the nonpreferentiality concept allows to make all components of the H-s and I-s equal, and then (III.17) may be written successively in the forms

$$\begin{aligned}\sum_{s\sigma}\{&\gamma_s\bar{H}_s V+\gamma_s H_s V+(\gamma_s\bar{I}_{s+}+\chi_\sigma\bar{I}_{\sigma+})\,(\partial_s V)\,VV^*+\\&+(\gamma_s\bar{I}_s+\chi_\sigma\bar{I}_\sigma)\,(\partial_s V^*)\,VV+\\&+(\gamma_s\bar{I}_s+\chi_\sigma I_\sigma)\,VVV^*\}=0\end{aligned} \tag{III.18}$$

and

$$\sum_{s}\gamma_s\partial_s V+kV+n=0 \tag{III.19}$$

where

$$k=\sum_{s}\gamma_s H_s\bar{H}^{-1} \tag{III.20}$$

and n is the nonlinear part.

Eq. (III.19) is the equation for a free microscopic field in very low frequency approximation.

Nonlinear field problems are very complicated, and there have been published several papers dealing with them [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28]. It is not our aim to add here to these discussions, but we want to illuminate only one aspect of the equation (III.19). In the approximation with the nonlinear term vanishing, we can write

$$\sum_{s}\gamma_s\partial_s V+kV=0 \tag{III.21}$$

and this equation can be interpreted as a linear quantum equation for particles with spin 1/2.

III.3. *The field equations with higher derivatives.* Keeping the one-field model discussed in III.2, we include now the higher derivatives. Then (III.7) becomes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Delta=\sum_{\rho pKLMN}\{&\overline{\mathcal{H}}_{\rho KL}^{p}\,[(\partial_p^{K+1}V)\,(\partial^L V^*)]_\rho+\\&+\overline{\mathcal{H}}_{\rho KL}^{\prime p}\,[(\partial_p^{K+1}V^*)\,(\partial^L-V)]_\rho+\mathcal{H}_{\rho KL}\,[(\partial^K V)\,(\partial^L V^*)]\\&+\overline{\mathcal{I}}_{\rho KLMN}^{\prime p}\,[(\partial_p^{K+1}V)\,(\partial^L V)\,(\partial^M V^*)\,(\partial^N V^*)]_\rho+\\&+\overline{\mathcal{I}}_{\rho KLMN}^{p}\,[(\partial_p^{K+1}V^*)\,(\partial^L V)\,(\partial^M V)\,(\partial^N V^*)]_\rho+\\&+\mathcal{I}_{\rho KONN}\,[(\partial^K V)\,(\partial^L V)\,(\partial^M V^*)\,(\partial^N V^*\,]_\rho\}\end{aligned} \tag{III.22}$$

where

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{H}}^{p}_{\rho KL}=\overrightarrow{\mathcal{H}}^{12p}_{\rho KL}+\overleftarrow{\mathcal{H}}^{21p}_{\rho LK} \\ \overline{\mathcal{H}}'^{p}_{\rho KL}=\overrightarrow{\mathcal{H}}^{21p}_{\rho KL}+\overleftarrow{\mathcal{H}}^{12p}_{\rho LK} \\ \mathcal{H}_{\nu pkl}=\mathcal{H}^{12}_{\nu KL}+\mathcal{H}^{21}_{\rho LK} \\ \overline{\mathcal{I}}'^{p}_{\rho KKMN}=\overrightarrow{\mathcal{I}}^{1122p}_{\rho KMLN}+\overrightarrow{\mathcal{I}}^{1212p}_{\rho KLMN}+\overrightarrow{\mathcal{I}}^{1221p}_{\rho KNLM}+\overleftarrow{\mathcal{I}}^{1212}_{\rho LMKN}+ \\ \qquad +\overleftarrow{\mathcal{I}}^{2112p}_{\rho MLKN}+\overleftarrow{\mathcal{I}}^{2211p}_{\rho MNLK} \\ \overline{\mathcal{I}}^{p}_{\partial KLMN}=\overrightarrow{\mathcal{I}}^{2112p}_{\rho KMLN}+\overrightarrow{\mathcal{I}}^{2121p}_{\rho KMNL}+\overrightarrow{\mathcal{I}}^{2211p}_{\rho KNLM}+\overleftarrow{\mathcal{I}}^{1122p}_{\rho LMNK}+ \\ \qquad +\overleftarrow{\mathcal{I}}^{1221p}_{\rho LNKM}+\overleftarrow{\mathcal{I}}^{2121p}_{\rho NMKL} \\ \mathcal{I}_{\rho KLMN}=\mathcal{I}^{1122}_{\rho KLMN}+\mathcal{I}^{1212}_{\rho KMLN}+\mathcal{I}^{1221}_{\rho KNML}+\mathcal{I}^{2112}_{\rho MLKN}+ \\ \qquad +\mathcal{I}^{2121}_{\rho NLMK}+\mathcal{I}^{2211}_{\rho MNKL} \end{cases} \tag{III.23}$$

The functional derivative of (III.22) with respect to V* leads to the equations

$$\sum_{\nu pKLMR}^{K,\ldots=Z} \{(-1)^{R}\,\overline{\mathcal{H}}^{p}_{\rho KR}\,(\partial_p^{R+K+1}V)_\rho+(-1)^{Z+1}\,\overline{\mathcal{H}}^{p}_{\rho KZ}\,(\partial_p^{Z+K+1}V)_\rho+$$

$$+(-1)^{R}\widehat{\mathcal{H}}_{\rho KR}\,(\partial^{K+R}V)_\rho+(-1)^{R}((\partial^{R}[\widehat{\mathcal{I}}^{p}_{\rho KLMS}\,((\partial_p^{K+1}V)\,(\partial^{L}V)\,(\partial^{M}V^*))_\rho+$$

$$+\widehat{\mathcal{I}}^{p}_{\partial KLMR}\,((\partial^{K}V)\,(\partial^{L}V)\,(\partial^{M}V^*))_\rho+\overline{\mathcal{I}}^{p}_{\rho KLMR}\,((\partial_p^{K+1}V^*)\,(\partial^{L}V)\,(\partial^{M}V))_\rho]+$$

$$+(-1)^{Z+1}\,\partial_p^{Z+1}\overline{\mathcal{I}}^{p}_{\rho KLMZ}\,((\partial^{K}V)\,(\partial^{L}V)\,\partial^{M}V^*))_\rho]\}=0 \tag{III.24}$$

with the notations

$$\begin{cases} \widehat{\mathcal{H}}_{\rho KR}=\mathcal{H}_{\rho KR}+\overline{\mathcal{H}}'_{\rho(R-1)K} \\ \widehat{\mathcal{I}}^{p}_{\rho KLMR}=\overline{\mathcal{I}}'^{p}_{\rho KLMR}+\overline{\mathcal{I}}'^{p}_{\rho KLRM} \\ \breve{\mathcal{I}}^{p}_{\rho KLMR}=\mathcal{I}_{\rho KLMR}+\mathcal{I}_{\rho KLRM}+\overline{\mathcal{I}}^{p}_{\rho(R-1)LKM}. \end{cases} \tag{III.25}$$

In view of the observations previously made on ρ, (III.24) may be rewritten in the form

$$\sum_{rKR}^{K,\ldots=Z}[(-1)^{R}\mathcal{H}_{rKR}\partial_r^{R+K+1}V+(-1)^{Z+1}\mathcal{H}'_{rKZ}\partial_r^{Z+K+1}V+$$

$$+(-1)^{R}\widehat{\mathcal{H}}_{rKR}\,\partial^{R+K}V]+\mathcal{N}=0, \tag{III.26}$$

$\mathcal{N}$ being the nonlinear part.

The general formal treatment of equations with higher derivatives may be performed according to previous papers [29] [30].

A deeper study of equation (III.26) without the nonlinear part can be made as in the papers by Dürr et al. [31] [32] [33]. Physical interpretations are obtainable as shown in several works [34] [35] [36] [37]. The nonlinear term introduces supplementary informations.

I. Conclusions.

We have presented a model for a space-field theory, and we have shown that it is possible to relate it to physical facts. The model exhibits some positive features, which may be summarized as follows : (i) a form of unification of the concept of space, time, and field is advanced ; (ii) the action principle gets a physical interpetation, being not merely a mathematical method for the deduction of the physical equations, but becomes a fundamental law of nature, the spacetime aspect of a path principle in Space I ; (iii) all classical field equations are consequences of the same fundamental law ; (iv) non-linear equations for „non-classic" microscopic fields have been obtained in similar manner ; (v) the approximate character of the laws of physics is made much clearer.

In order to use the present model as a framework for a field-particle theory, the interactions have to be included, and the problem of symmetries to transformation groups must be examined. The way is open for further investigations.

FREFERENCES

1. Smrz P., Lett. Nuovo Cimento, 1969, *1*, 488 and Nuovo Cimento, 1970, *65 B*, 147.
2. Edmonds J. D. jr., Foundations of Physics, 1975, *5*, 239.
3. Garcia-Sucre M., Inter. J. Theor. Phys., 1975, *12*, 25 ; 1978, *17*, 163 ; 1979, *18*, 725.
4. Borneas M., Inter. J. Theor. Phys., 1976, *15*, 773.
5. Bunge M. şi Garcia Máynez A., Inter. J. Theor. Phys., 1976, *15*, 961.
6. Gregory C., Speculations in Scinece and Technology, 1979, *2*, 191.
7. Cognola G., Soldati R., Vanzo L., and Zerbini S., J. Math Phys., 1979, *20*, 2613.
8. Borneas M., Analele Universităţii Timişoara, 1980, *18*, fasc. 1, 57.
9. Belifante F., *Meansurements and time reversal in objective quantum theory* (preprint).
10. Landau L. D. and Lifshitz E. M., Teoria polia, G.I.F.L., Moskow (1960).
11. Borneas M., Analele Universităţii Timişoara, 1980, *18*, fasc. 2.
12. Kawaguchi A., Rend. Circ. Mat. Palermo, 1932, *56*, 246.
13. Sokolov A. and Ivanenko D., Cvantovaia teoria polia, G.I.T.T.L., Moskow-Leningrad (1952).
14. Horváth J. I., Suppl. Nuovo Cimento, 1958, *9*, 444.
15. Ikeda S., Lett. Nuovo Cimento, 1975, *13*, 497, and 1977, *18*, 29.
16. Heisenberg W., Rev. Modern Phys., 1957, *29*, 269.
17. Rybakov Yu. P., Foundations of Physics, 1974, *4*, 149.
18. Ulmer W., Inter. J. Theor. Phys., 1975, *13*, 51, and 1977, *16*, 533.
19. Klein J. J., Canadian J. Phys., 1976, *54*, 1383.
20. Klein A., and Krejs F., Phys. Rev. D., 1976, *13*, 3282.
21. Kim D. Y., Inter. J. Theor. Phys., 1976, *15*, 713.
22. Calogero F. and Degasperis A., Nuovo Cimento, 1976, *33 B*, 467.
23. Schmitt K., and Long-yi Tsai, Proc. Soc. Edinburgh, 1977, *76 A*, 227.
24. Ranada A. F., Inter. J. Theor. Phys., 1977, *16*, 795, and J. Phys. A., 1978, *11*, 341.
25. Kibble T. W. B., Commun. Math. Phys., 1978, *64*, 73.
26. Van der Merwe P. du T., Nuovo Cimento, 1978, *46*, 1.
27. Okolovski J. A., J. Math Phys., 1978, *19*, 2 253.
28. Censor D., Foundations of Physics, 1980, *10*, 555.
29. Borneas M., Phys. Rev., 1969, *186*, 1299.
30. Musicki D., J. Phys. A., 1978, *11*, 39.
31. Dürr H. P., Nuovo Cimento, 1974, *22 A*, 386.
32. Bigi I. I., Dürr H. P., and Winter H. J., Nuovo Cimento, 1974, *22 A*, 420.
33. Dürr H. P., and der Merwe T., Nuovo Cimento, 1974, *23 A*, 1.
34. Bopp F., Annalen der Physik, 1940, *38*, 345.
35. Podolski B., Phys. Rev. 1941, *62*, 68.
36. Rayski J., Acta Physica Polonica, 1965, *27*, 947, and Lett. Nuovo Cimento, 1979, *25*, 148.
37. Riewe F. and Green A.E.S., J. Math. Phys., 1972, *13*, 1374.

Buletinul ştiinţific şi tehnic al Institutului Politehnic „Traian Vuia" Timişoara	Tom. 27(41)	Fasc. 1	pag. 1–88	Timişoara	Ianuarie–Iunie 1982

I.P.B.T. 1845